
Modélisation de la turbulence

Yann MARCHESSE

ECAM LaSalle

40 Montée Saint-Barthélemy

69321 Lyon Cedex 05

www.ecam.fr

Yann Marchesse
Pôle Énergétique / LabECAM
ECAM LASALLE
40 Montée St.-Barthélemy
69321 Lyon Cedex 05

Modélisation de la turbulence

Document réalisé à partir de \LaTeX
Date de compilation du document : 12 juin 2023

Sommaire

Avant-propos	7
Nomenclature	9
I Modélisation de la turbulence en vue d'une application à la CFD	11
1 TURBULENCE	13
1.1 Renseignements sur l'agitation turbulente	14
1.2 Structures cohérentes	17
1.3 Passage du laminaire vers le turbulent : la transition	17
1.3.1 Cas d'une conduite	18
1.3.2 Cas d'une couche limite sur une plaque plane	19
1.4 Influence de la paroi	20
2 ÉQUATIONS DE LA MÉCANIQUE DES FLUIDES	25
2.1 Dérivée particulaire	26
2.2 Équation de continuité	27
2.3 Bilan de quantité de mouvement	30
2.4 Équation de l'énergie	31
2.5 Bilan sur les équations obtenues par l'application des principes fondamentaux	34
2.6 Conditions limites	35
3 MODÉLISATION DE LA TURBULENCE	37
3.1 Trois approches numériques	37
3.1.1 Simulation directe numérique (DNS)	38
3.1.2 Simulation des grandes échelles (LES)	38
3.1.3 Modélisation statistique de la turbulence (RANS)	41
3.1.4 Remarques sur les trois approches	44
3.2 Modèle de turbulence du premier ordre - Concept de la viscosité turbulente	44
3.2.1 Modèle algébrique ou modèle à zéro équation	46
3.2.2 Modèles de fermeture à une équation de transport	47
3.2.3 Modèles de fermeture à deux équations de transport	50

4 SOMMAIRE

3.2.4	Équation finale	55
3.3	Modèle de turbulence du second ordre	55
3.4	Influence de la paroi	56
3.5	Choisir le modèle de turbulence	57
3.6	Modélisation instationnaire - méthode URANS	58
3.7	Et l'industrie dans tout ça ?	60
3.8	Résolution numérique à partir d'un code de calculs	60
4	APPLICATION DE LA MODÉLISATION DE LA TURBULENCE À LA CFD	63
4.1	Les codes de calcul en CFD	64
4.2	Structure d'un code CFD	64
4.2.1	Le pré-processeur	64
4.2.2	Le solver	65
4.2.3	Le post-processeur	66
4.3	Le maillage	66
4.3.1	Différents types de maillage	66
4.3.2	Épaisseur de la première maille	67
4.4	Les conditions limites	68
4.5	Les conditions initiales	69
4.6	Les schémas numériques de convection	69
4.7	Convergence d'un calcul	70
4.7.1	Les résidus	70
4.7.2	La sous-relaxation	71
4.7.3	Calcul permanent à partir d'une approche pseudo-transitoire	72

II Exemples de prédictions numériques d'écoulements et d'échanges thermiques 73

Présentation des études 75

5	Cas test : 2D Model Hill Flow	77
5.1	Approche numérique	78
5.1.1	Domaine de calcul et maillage	78
5.1.2	Conditions limites	79
5.2	Résultats numériques	79
6	Écoulement au passage d'un obstacle prismatique	81
6.1	Approche numérique	82
6.1.1	Domaine de calcul et maillages	82
6.1.2	Conditions limites	82
6.1.3	Modèles de turbulence	83
6.1.4	Discrétisation temporelle	83
6.2	Résultats numériques	84
6.2.1	Validation du maillage sur le pavé	84
6.2.2	Efforts aérodynamiques	84

6.2.3	Sillage du pavé	84
6.3	Conclusion	85
7	Étude des paramètres turbulents dans un canal	87
7.1	Approche numérique du calcul annexe	87
7.2	Résultats numériques	89
7.3	Approximation analytique des grandeurs turbulentes	89
7.4	Conclusion	92
8	Prédiction numérique d'un échange thermique convectif à partir de différents modèles de turbulence	93
8.1	Approche numérique	94
8.1.1	Domaine de calcul et maillages	94
8.1.2	Conditions limites	94
8.1.3	Modèles de turbulence	95
8.2	Résultats numériques	95
9	Influence de la finesse du maillage sur la prédiction numérique des échanges thermiques convectifs d'une plaque plane	99
9.1	Approche numérique	99
9.1.1	Domaine et maillage	99
9.1.2	Conditions limites	100
9.2	Modèle proposé	101
9.3	Résultats numériques	101
	Lectures intéressantes	107

6 SOMMAIRE

Avant-propos

Les écoulements rencontrés dans l'industrie ou tout simplement au quotidien sont pour la plupart dominés par des mouvements chaotiques : la **turbulence**. Au-delà de la diffusion moléculaire, les échanges de masse, de quantité de mouvement et de chaleur sont ainsi essentiellement régis par ce mode d'écoulement. L'impact de la turbulence peut être positif ou négatif, l'ingénieur doit donc être capable de prédire ces effets lors de la conception de systèmes. Malheureusement, le mouvement turbulent est très complexe et présente la plupart du temps des caractéristiques tridimensionnelles et instables. Ce mouvement consiste en la surperposition de tourbillons dont le spectre de taille est très large, celui-ci balaye des grosses structures dont la taille dépend de la géométrie et correspondant à des fluctuations de basses fréquences jusqu'aux petites structures associées à des fluctuations de hautes fréquences dont l'échelle est celle de la dissipation énergétique.

La simulation numérique peut être d'un grand secours à l'ingénieur, le calcul analytique demeurant ici très peu efficace. Il serait toute fois imprudent de considérer cette approche comme étant l'unique voie à emprunter, en effet la modélisation des écoulements vient plutôt en complément des essais sur site ou sur maquette.

Lors d'une étude, la CFD intervient souvent en amont lors de la conception et évite alors aux constructeurs de fabriquer de nombreux et surtout coûteux prototypes. Elle peut alors être caractérisée de "prototypage virtuel". En effet, un des principaux avantages du calcul numérique est la possibilité de faire varier les paramètres géométriques, dynamiques ou thermophysiques du problème traité en évitant la répétition d'expériences longues et lourdes à gérer. Ensuite, plus en aval de l'étude, elle peut être utile à l'analyse d'avaries décelées sur des équipements ou pour améliorer leur performance.

Le traité de ce cours s'inscrit dans cette problématique et est composé de deux parties. Dans la première partie, la turbulence est en premier lieu examinée (chapitre 1), suivie des écritures des équations mathématiques traduisant trois principes fondamentaux (chapitre 2). On s'intéresse alors aux conséquences des termes fluctuants, une fois ceux-ci introduits dans les équations du mouvement des fluides. Cette étape présente essentiellement le tenseur de Reynolds que l'on cherchera ensuite à estimer à partir de modèles de fermeture (chapitre 3). Ensuite, l'articulation d'un code de calcul est brièvement présentée (chapitre 4).

La deuxième partie du document vise d'une part à présenter quelques écoulements simulés dans des configurations standards, mais surtout contribue à sensibiliser l'utilisateur de codes de calculs au choix des modèles de turbulence (chapitre 5), aux

conditions limites en entrée de domaine (chapitre 7), à la finesse du maillage (chapitre 8), et à la pertinence de l'emploi d'une loi de paroi (chapitre 9).

Enfin, cet exposé a pour but unique de **familiariser** le lecteur à la modélisation de la turbulence. On n'y trouvera donc que le strict minimum des concepts existants. Le lecteur, plus curieux, est invité quant à lui à consulter quelques ouvrages cités en annexe. Par contre, on trouvera ici quelques informations pratiques pour utiliser tous les logiciels de calcul.

Nomenclature

La même notation peut dans certains cas représenter des quantités physiques distinctes, mais replacée dans le contexte du chapitre traité, toute ambiguïté devrait être levée.

Caractères usuels

c_v	Chaleur spécifique à volume constant
C_k	Constante de Kolmogorov (Eq. 3.7)
\mathcal{D}	Volume de contrôle
e	Énergie interne par unité de masse
$E(k)$	Spectre de l'énergie cinétique turbulente
f_i	Effort volumique
f_v, f_μ	Coefficients d'amortissement (Eqs. 3.10 et 3.16)
k	Énergie cinétique turbulente moyenne $k = \overline{u'_i u'_i} / 2$
k	Conductivité thermique
\tilde{k}	Nombre d'onde $\tilde{k} = 2\pi / \lambda$
l_m	Longueur de mélange
m	masse
\vec{n}	Vecteur unitaire sortant d'un volume de contrôle
p	Pression
P_k	Production d'énergie cinétique turbulente $P_k = -\overline{\rho u'_i u'_j \partial \bar{u}_i / \partial x_j}$
\dot{q}	Densité volumique du taux de chaleur
\vec{q}	Vecteur densité surfacique de chaleur reçue par conduction
r	Constante des gaz parfaits
Re	Nombre de Reynolds
Re _c	Nombre de Reynolds critique
\mathcal{S}	Surface d'un volume de contrôle
S_{ij}	Tenseur des vitesses de déformation
t	temps
T	Température
T	Durée d'observation dans l'opérateur moyenne
T_w	Température de paroi
u	Composante selon x du vecteur vitesse

Caractères usuels (suite)

u_{CL}	Vitesse au centre d'une conduite
u_f	Vitesse de frottement $u_f = \sqrt{\tau_p/\rho}$
v	Composante selon y du vecteur vitesse
\vec{V}	Vecteur vitesse d'écoulement
\mathcal{V}	Volume d'un volume de contrôle
w	Composante selon z du vecteur vitesse
y^+	Distance adimensionnée à la paroi

Caractères grecs

δ	Épaisseur de couche limite
δ_{ij}	Symbole de Kronecker $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon
ϵ	Taux de dissipation moyen de l'énergie cinétique turbulente
κ	Constante de von Kármán (Eq. (1.4))
λ	Longueur d'onde
λ	Coefficient de pertes de charge $\Delta p = \lambda \frac{L}{D} \rho \frac{V^2}{2}$
μ	Viscosité dynamique
μ_e	Viscosité effective
μ_T	Viscosité turbulente
ν	Viscosité cinématique
ρ	Masse volumique
$\sigma_k, \sigma_\epsilon$	Nombres de Prandtl turbulent (Eqs. 3.8 et 3.15)
σ_{ij}	Tenseur des contraintes
τ_p	Contrainte pariétale
τ_{ij}	Tenseur des contraintes visqueuses
ω	Taux de dissipation spécifique moyen

Première partie

Modélisation de la turbulence en vue d'une application à la CFD

Chapitre 1

TURBULENCE

La plupart des écoulements “naturels” observés quotidiennement sont turbulents (fumée de cigarette, crème de lait versée dans le café, nuages). Ils sont d’autre part très diversifiés : fluides biologiques (sang), mouvements de géofluides (vents, courants marins), mouvements de fluides stellaires (circulation gazeuse autour des planètes). Malgré cela, ces écoulements ont des propriétés en commun que nous énoncerons plus loin. Les équations qui gouvernent le mouvement instantané des fluides, qu’ils soient turbulents ou non, ont été écrites par Claude Navier¹ en 1823. Elles sont appelées équations de Navier-Stokes en raison des perfectionnements apportées ultérieurement par George Stokes². Il s’agit ni plus ni moins des équations de Newton qu’il faut appliquer à une particule fluide. Ces équations avaient été préalablement écrites par Euler mais Navier eut l’ingéniosité d’y rajouter un terme de friction entre les diverses couches de fluide.

L’équation de Navier-Stokes pour la vitesse instantanée est connue depuis longtemps, cependant sa résolution reste trop compliquée. Une solution a alors été d’essayer de proposer une solution pour l’écoulement moyen. Malheureusement le passage de l’équation de Navier-Stokes à l’équation pour la moyenne fait apparaître un terme qui n’est pas connu de manière exacte. Ce terme représente l’effet des fluctuations sur la vitesse moyenne et doit être approché ou modélisé.

1. Claude Navier (1785-1836), physicien français qui, en 1821, proposa les équations du mouvement vibratoire d’un solide, généralisées par Cauchy, et résolue par Poisson. Stokes contribua aussi aux équations de mouvement de fluide, connues sous le nom d’équations de Navier-Stokes.

2. George Stokes (1819-1903), mathématicien et physicien irlandais qui contribua énormément aux avancées scientifiques en son temps. Il améliora à la fois la formulation des équations de mouvement des fluides mais aussi leur compréhension.

La turbulence est devenue une science expérimentale vers la fin du XIX siècle quand l'anglais Osborne Reynolds³ a pu observer la transition du régime laminaire vers le régime turbulent (publication en 1883 [40]). Il mit ainsi en évidence quelques lois assez simples et introduisit un nombre adimensionnel portant son nom qui caractérise cette transition. Notons que le terme *turbulence* n'est jamais utilisé par Reynolds dans son manuscrit, et le premier à l'utiliser semble être William Thomson (devenu plus tard Lord Kelvin) en 1887 [49]. Malgré tout, avant les années 1950, la turbulence était un sujet obscur. La seule issue pour l'ingénieur était d'"expérimenter" sur des modèles physiques afin d'améliorer son savoir-faire. Heureusement après les années 1960, la situation allait se débloquer avec quelques progrès accomplis en matière de modélisation, en même temps que la capacité des traitements numériques augmentait fortement. Cependant, la prédétermination de propriétés statistiques locales était encore impossible. De plus quelques problèmes majeurs demeuraient : l'imprédictibilité, l'universalité des modèles établis, et la convergence des fermetures. Actuellement, ces problèmes ont été en partie résolus et les calculs numériques permettent une bonne estimation de l'écoulement moyen en présence d'une turbulence développée. Des méthodes plus récentes permettent aussi d'estimer le champ fluctuant par résolution des équations de Navier-Stokes instantanées. On parle de façon abusive d'expérience numérique.

1.1 Renseignements sur l'agitation turbulente

Un écoulement représente un glissement de particules fluides les unes sur les autres. L'agitation moléculaire entraîne à son échelle des échanges entre ces couches et une diffusion de l'écoulement (non perceptible à l'échelle du milieu continu, i.e. à l'échelle de la particule fluide).

A l'échelle du milieu continu, le régime turbulent présente, en plus, des mouvements **désordonnés** et **tridimensionnels**. Notons tout de même que bien que ce que nous observons soit très complexe, très désordonné, c'est très loin d'être le désordre total. En effet, la turbulence est composée de structures cohérentes⁴, en particulier de tourbillons (que l'on observe en aval d'un pont par exemple). Il s'agit là d'un mélange subtile d'ordre et de désordre qui en fait une des principales difficultés vis à vis de la modélisation. Toute cette agitation porte le nom d'**agitation turbulente**.

Notons d'autre part qu'il s'agit d'un mouvement secondaire de l'écoulement. La turbulence n'est donc pas liée à la nature du fluide mais à son mode de mouvement.

3. Osborne Reynolds, physicien anglais (1842-1912). Ces premiers travaux concernent le magnétisme et l'électricité. Après 1873, il se concentre principalement sur la dynamique des fluides. Il étudie entre autre les changements de régime d'un écoulement dans une conduite. Son expérience restera célèbre et portera son nom. En 1886, il publie "*The theory of lubrication*" et invente la tribologie (étude des frottements).

4. Cette cohérence n'est néanmoins pas observée sur le trajet entier de la structure. Il existe une distance sur laquelle la structure reste cohérente avec elle-même, après quoi elle s'apparie avec une autre pour former une autre structure de plus grande taille.

On traite la plupart du temps de la **turbulence pleinement développée**, caractérisée par :

- **Taille supra-moléculaire** : la taille admissible par une structure turbulente (on dira *cohérente*) est guidée d'une part par l'étendue spatiale disponible (dimensions d'un canal, épaisseur de la couche limite) et d'autre part par la viscosité. Il existe en effet une échelle appelée *échelle de Kolmogorov*⁵ s'interprétant comme étant la plus petite dimension des structures ou tourbillons que l'on peut rencontrer dans un écoulement turbulent. En-dessous de cette échelle, les effets visqueux font leurs effets, et l'énergie mécanique est totalement transformée en chaleur. Comprenons bien qu'il existe alors des structures de taille plus élevée capable de dissiper. Pour se donner une idée, dans l'atmosphère terrestre par exemple, l'échelle de dissipation est de l'ordre du millimètre, alors que les plus grosses structures ont des échelles de plusieurs milliers de kilomètres.
- **Comportement aléatoire** : les mesures mettent en évidence l'aspect chaotique de toute fonction du champ de l'écoulement (température, pression, vitesses, masse volumique). On perd alors toute notion de prédictibilité présente dans l'écoulement laminaire. Une approche statistique est alors nécessaire (ex : la météo).
- **Dénombrement infini** : la mesure de la turbulence donne des résultats différents selon le point considéré. Néanmoins, ceux-ci font apparaître des oscillations recouvrant un très large spectre en fréquence⁶ (caractérisées par le nombre d'onde $2\pi/\lambda$).
- **Structures tridimensionnelles** : il n'y a pas de direction privilégiée même en présence d'un écoulement considéré comme bidimensionnel.
- **Intermittence**⁷ : ce phénomène est observé dans des cas précis : lors du passage laminaire/turbulent, dans les petites échelles (dissipation), et proche des frontières libres (couche de mélange d'un jet). Ce phénomène est lié à la pénétration massive de fluide non turbulent dans la couche de mélange.
- **Cinématique rotationnelle** : les fluctuations de vitesse sont porteuses de fluctuations de rotationnel. La turbulence ne "produit" pas de rotationnel mais aura des effets sur cette quantité tels qu'un renforcement de sa production proche des parois (gradient de vitesse important), ou la diffusion de vorticité hors des zones de production sous l'effet de l'agitation moléculaire.

5. Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), physicien et mathématicien russe. Il est à l'origine de la théorie de la turbulence aux petites échelles. Il démontra entre autres la loi de puissance en $k^{\frac{5}{3}}$ du spectre d'énergie cinétique représentant le mouvement turbulent.

6. La large gamme de fréquence est à mettre en parallèle avec celle des tailles de structure.

7. Zone où l'on observe de façon alternée un mélange d'agitation et de calme au sein d'un écoulement turbulent.

- **Dynamique non linéaire** : interaction entre tous les mouvements présents dans l'écoulement selon une dynamique qui est régie par les équations de Navier-Stokes.
- **Énergie dissipative** : les écoulements turbulents sont dissipatifs, l'énergie cinétique portée par les petites structures est ainsi transformée en énergie thermique. Les structures de tailles différentes reçoivent l'énergie cinétique de structures ayant une taille supérieure. Les grosses structures prennent leur énergie cinétique quant à elle de l'écoulement moyen. Ce processus de transfert d'énergie, sans production ni dissipation, est appelé *Cascade d'énergie*, et a été énoncé par Richardson en 1922 [41] et complété par Kolmogorov en 1941 [20]. Évidemment le transfert d'énergie cinétique n'est pas total entre les structures de tailles différentes et seule une portion de cette énergie est transférée et le reste dissipé. On suppose généralement que 90% de l'énergie cinétique reçue par les grosses structures est dissipée par les petites structures. Ce propos est illustré à la figure 1.1. On note sur la courbe d'énergie trois régions : la région I dans laquelle les grosses structures portent la plupart de l'énergie. Ces structures interagissent avec l'écoulement moyen et ponctionnent de l'énergie de cet écoulement. Ce transfert est caractérisé par la présence d'un terme de production P_k dans l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente, k (voir par exemple l'équation (3.9) page 49). La région II d'inertie dans laquelle le transfert d'énergie est réalisé sans dissipation, *i.e.* $P_k = \epsilon$, où ϵ représente la dissipation de l'énergie cinétique turbulente. Dans le cas d'une turbulence pleinement développée une analyse dimensionnelle permet d'écrire la relation $E(\tilde{k}) = \text{Cste} \times \epsilon^{2/3} \tilde{k}^{-5/3}$ nous donnant alors une information de la décroissance de l'énergie cinétique turbulente avec la longueur d'onde des structures. La région II est d'autant plus grande que le nombre de Reynolds est important. La dissipation a lieu dans la région III, région dans laquelle les structures sont de tailles suffisamment petites pour dissiper l'énergie cinétique pour la transformer en énergie thermique. Ce transfert est caractérisé par le terme $\bar{\epsilon}$ dans l'équation (3.9).

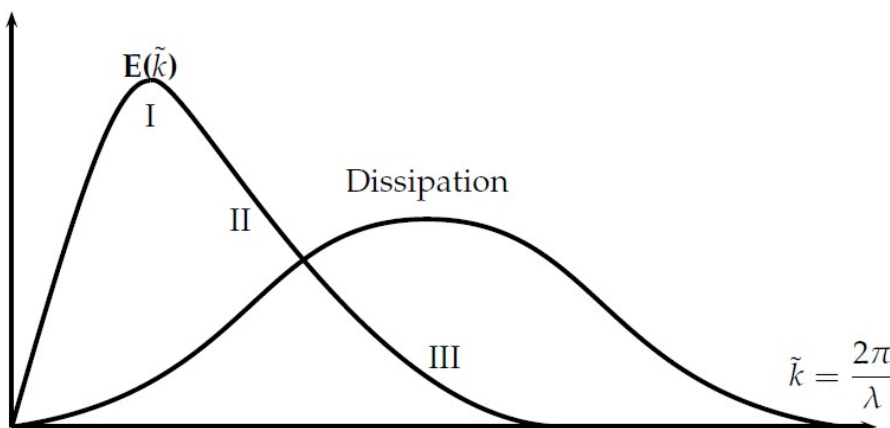


FIGURE 1.1 : Spectres d'énergie et de dissipation.

À partir de toutes les caractéristiques vues ci-dessus, on propose une définition de la turbulence [27] :

La turbulence est un mode naturel d'écoulement d'un fluide visqueux où des mécanismes internes d'échange d'énergie assurent la création et le maintien de toute hiérarchie de mouvements chaotiques répartis continûment sur une large gamme d'échelles macroscopiques.

1.2 Structures cohérentes

Nous l'avons vu plus haut, la turbulence apparaît comme un mode d'écoulement chaotique pour lequel un tourbillon créé est immédiatement étiré dans toutes les directions, et finalement détruit par la turbulence. Il existe néanmoins des tourbillons cohérents ou structures cohérentes au sein de cette turbulence, c'est à dire des structures ayant "un temps de vie important devant leur temps de retournement⁸" selon la définition énoncée par Marcel Lesieur [27] (Fig. 1.2).



FIGURE 1.2 : Structures cohérentes dans une couche de mélange air/azote (d'après Brown [5]).

1.3 Passage du laminaire vers le turbulent : la transition

La transition d'un écoulement laminaire vers un écoulement turbulent a été en premier lieu étudiée de façon expérimentale par O. Reynolds [40]. Cette transition est un problème très complexe. En conséquence, il n'existe pas à l'heure actuelle de modèle théorique permettant de prédire efficacement le comportement du fluide lors de cette phase. Soulignons tout de même la première approche théorique proposée par Landau en 1944 [21] dans laquelle celui-ci considère la transition comme l'apparition de mouvements périodiques non-stationnaires dont la phase initiale est arbitraire. Landau baptise ce premier degré d'indétermination "degré de liberté" (introduction historique de ce terme). Lorsque le rapport des efforts d'inertie et de viscosité augmente, le mouvement devient instable conduisant à l'apparition d'un nouveau mouvement périodique (deux degrés de liberté). On atteint alors très vite un nombre très important de degré de liberté, correspondant au **cycle limite** de Landau.

Le point de transition est difficilement déterminé par l'observation. On préférera effectuer des mesures et étudier l'évolution d'un paramètre qui dépend du nombre

8. Il s'agit là du temps nécessaire au tourbillon pour qu'il puisse exécuter une rotation autour de lui-même.

de Reynolds (coefficient de perte de charge dans une conduite, épaissement de la couche limite le long d'une plaque plane, etc.).

1.3.1 Cas d'une conduite

La transition vers un régime turbulent, dans le cas d'un écoulement en conduite, peut être déterminée par le changement d'évolution des pertes de charge. Ces dernières sont caractérisées par un coefficient appelé **coefficient de pertes de charge**, λ tel que

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{D} \rho \frac{V^2}{2}$$

où L est la distance entre les deux mesures de pression, D le diamètre de la conduite, et V la vitesse moyenne de l'écoulement. Le coefficient de pertes de charge dépend du nombre de Reynolds et du rapport de la rugosité relative ϵ/D caractérisant l'état de surface de la conduite.

Lorsque le nombre de Reynolds est inférieur à 2000, l'écoulement est laminaire, et le coefficient de pertes de charge est le même quelle que soit la rugosité. Il vaut dans ce cas :

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} \quad : \quad \text{Hagen/Poiseuille}$$

L'écoulement quitte le régime laminaire lorsque le nombre de Reynolds dépasse 2000, la région caractérisée par des nombres de Reynolds compris entre 2000 et 4000 étant appelée régime critique. Le coefficient de pertes de charge est très mal défini dans cette région car la turbulence n'est pas complète. En effet, l'écoulement alterne entre des régimes laminaire et turbulent.

Pour des nombres de Reynolds supérieurs à 4000, l'écoulement devient turbulent et le coefficient de pertes de charge dépend du nombre de Reynolds et de la rugosité relative. Pour des conduites lisses, et dès lors que $4000 < \text{Re} < 100000$, le coefficient est estimé par la relation :

$$\lambda = \frac{0,316}{\text{Re}^{1/4}} \quad : \quad \text{Blasius}$$

L'évolution du coefficient de pertes de charge n'est pas linéaire décroissante. En effet, celui-ci voit ses valeurs décroître tant que le nombre de Reynolds reste inférieur à une première valeur critique (notée Re_{c1}). Le nombre de Reynolds augmente brutalement au passage de la transition. Pour des nombres de Reynolds supérieurs à une deuxième valeur critique (notée Re_{c2}), le comportement turbulent se traduit par une nouvelle loi de décroissance différente de celle observée en laminaire. On pourra alors trouver un critère de transition, Re_c tel que

$$\text{Re}_c = \frac{1}{2} [\text{Re}_{c1} + \text{Re}_{c2}] \quad (1.1)$$

La mesure de l'évolution des pertes de charge avec le nombre de Reynolds est conforme à la précédente discussion (Fig. 1.3). Le nombre de Reynolds critique, estimé par la relation (1.1), vaut $\text{Re}_c = 2800$. On note d'autre part que les valeurs du coefficient de perte de charges obtenues à partir des deux modèles précédents (Hagen/Poiseuille et Blasius) sont très proches des valeurs mesurées.

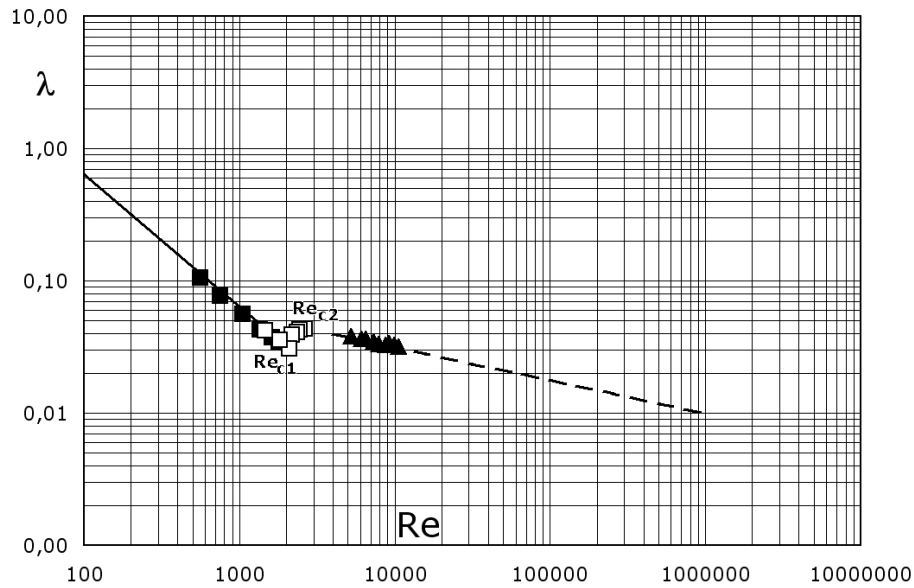


FIGURE 1.3 : Évolution du coefficient de pertes de charge avec le nombre de Reynolds. Mesures effectuées au laboratoire de mécanique : ■, □ manomètre Eau/Air ; ▲, manomètre Eau/Mercure.

1.3.2 Cas d'une couche limite sur une plaque plane

Considérons une plaque plongée dans un écoulement de vitesse U . La vitesse s'annule à la surface de la plaque, et le passage de cette vitesse nulle à la vitesse de l'écoulement externe s'effectue sur une distance très faible δ appelée couche limite (Région notée 1 sur la figure 1.4). Ainsi la vitesse longitudinale évolue très rapidement avec la distance transversale dans cette région. Pour des positions proches du bord d'attaque ($x = 0$), la couche limite est laminaire, et l'épaisseur de couche limite, $\delta(x)$ évolue selon $x^{0,5}$. Pour une distance plus en aval, des instabilités se développent, caractérisant la transition vers la turbulence. Au-delà de cette abscisse critique, l'épaisseur de couche limite évolue selon $x^{0,8}$. Le nombre de Reynolds basé sur la distance au bord d'attaque, $Re_x = Ux/\nu$, est habituellement utilisé ici pour caractériser cette transition. La figure 1.5 rassemble des mesures de l'épaississement de la couche limite en fonction du Reynolds local. On observe la transition du régime d'écoulement à partir de $Re = 3,2 \times 10^5$ par le changement d'évolution de δ .

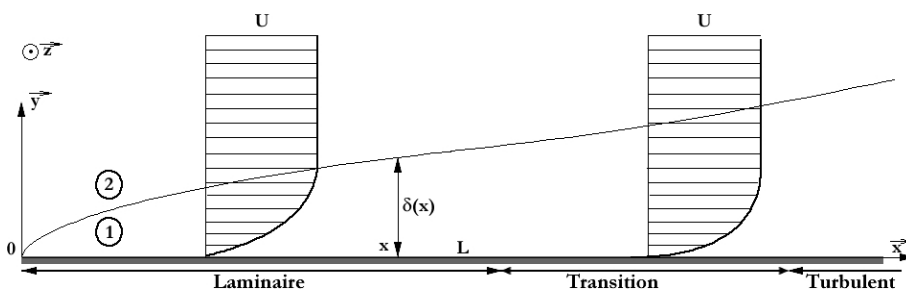


FIGURE 1.4 : Représentation schématique de la transition d'une couche limite laminaire vers un régime turbulent pour une plaque plane sans gradient de pression transversal.

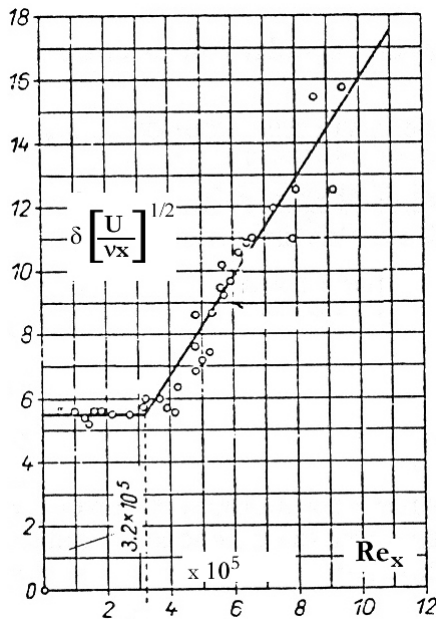


FIGURE 1.5 : Évolution de l'épaissement de la couche limite en fonction du nombre de Reynolds local. Notez le changement d'évolution de l'épaissement de couche limite à partir de $Re = 3,2 \times 10^5$ (d'après Schlichting [43]).

1.4 Influence de la paroi

La turbulence telle que nous l'avons définie plus haut est limitée à une turbulence pleinement développée. Lorsqu'une paroi est proche, les importants gradients modifient fortement cette turbulence. La figure 1.6 présente la répartition des différents phénomènes liés à l'énergie cinétique turbulente prenant place dans la couche limite (i.e. production et dissipation de l'énergie cinétique turbulente, etc.). Ces estimations ont été effectuées à partir de la méthode numérique DNS par Moser et al. [34] dans le cas d'un écoulement dans un canal. Les résultats expérimentaux confirment ces tendances, même s'il est très difficile de les obtenir par cette voie. On note d'après ces résultats qu'il y a équilibre entre la production et la dissipation d'énergie cinétique turbulente pour $y^+ > 30$ jusqu'à une distance telle que $y/h \sim 0,5$ (cette dernière valeur est absente des figures). Ceci tend à montrer le caractère isolé de cette région, car n'étant pas perturbée par la paroi proche et l'écoulement principal (les autres termes de transfert vus plus haut étant négligeables). Notons d'autre part que dans la région caractérisée par $y^+ < 30$, la dissipation n'est plus équilibrée par le terme de production (les termes fluctuants deviennent nuls par la présence de l'adhérence) mais par un terme de diffusion visqueux. Ces deux régions constituent la *région interne* de la couche limite et est définie de façon plus générale par la relation $y < 0,1\delta$, avec δ l'épaisseur locale de la couche limite.

Dans le but de décrire la couche limite, on s'intéresse généralement à l'évolution transversale de la vitesse longitudinale dans la couche limite. On peut baser notre réflexion sur une approche globale pour laquelle on cherche à décrire notre problème à partir de produits sans dimension. D'après ce que nous venons de voir, la vitesse locale u dépend des contraintes locales de frottement exercées par la paroi (τ_p), des propriétés du fluide (ρ et μ), et de la distance à la paroi (y). Il est donc possible à partir

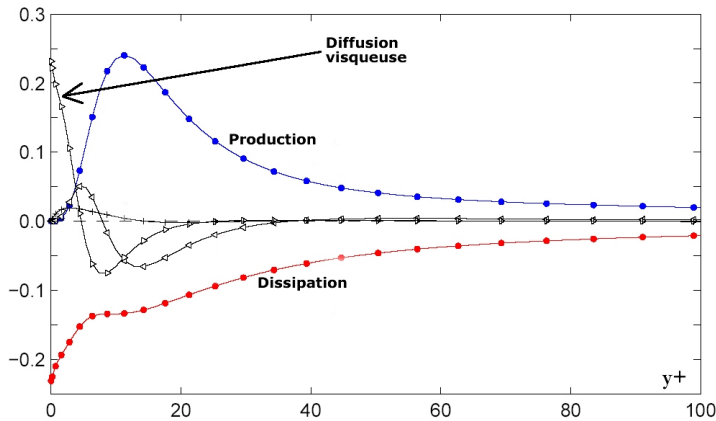


FIGURE 1.6 : Bilan de l'énergie cinétique turbulente dans la région interne d'une couche limite (d'après Moser [34]). y^+ est la distance à la paroi adimensionnée.

du théorème de Vashy-Buckingham de construire deux nombres sans dimension :

$$u^+ = \frac{u}{\sqrt{\tau_p/\rho}} \quad \text{et} \quad y^+ = \frac{y \times \sqrt{\tau_p/\rho}}{\nu} \quad (1.2)$$

avec $\sqrt{\tau_p/\rho}$ homogène à une vitesse que l'on nomme *vitesse de frottement*, notée u_f , et ne possédant pas de signification physique (on préfère néanmoins manipuler une vitesse au lieu d'une tension surfacique). Pour des vitesses moyennes, on aura en effet plutôt intérêt à s'intéresser au rapport U/u_f , et non pas à U seule. De même, il est préférable de regarder le rapport $\overline{u'_i u'_j}/u_f^2$ au lieu de $\overline{u'_i u'_j}$ seul. La vitesse de frottement est de l'ordre de 5% de la vitesse de débit.

L'évolution transversale de la vitesse longitudinale dans la région interne de la couche limite témoigne de plusieurs zones composant cette région interne de la couche limite : (1) la sous-couche visqueuse ($y^+ < 5$) dans laquelle le tenseur de Reynolds est négligeable devant les contraintes visqueuses (Fig. 1.7). Dans cette région la contrainte visqueuse, τ , est régie selon la formule de Newton (*i.e.* $\tau = \mu \partial u / \partial y$), ceci entraînant la relation :

$$u^+ = y^+ \quad (1.3)$$

exprimant le fait que la vitesse évolue linéairement avec la distance à la paroi et (2) la zone logarithmique ($30 < y^+ < 1000$) dominée par les contraintes turbulentes (Fig. 1.8) et dans laquelle une évolution logarithmique de la vitesse est observée :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B \quad (1.4)$$

κ et B étant des constantes du modèle obtenues expérimentalement sur une plaque plane et lisse (respectivement 0,41 et 5,2). La région située entre ces deux zones précédentes ($5 < y^+ < 30$) est appelée *zone tampon*. La région interne de la couche limite ne dépend donc que des paramètres y^+ et u_f , et reste donc isolée de l'écoulement principal.

Au-delà de la zone logarithmique, la relation (1.4) n'est plus valable car les effets de l'écoulement principal sont de moins en moins négligeables. La relation de vitesse qui ne dépendait que de y^+ doit tendre de façon asymptotique vers une relation cette

FIGURE 1.7 : Profil de la vitesse moyenne dans la sous-couche visqueuse. Estimation numérique à partir de la méthode DNS (ligne hachurée, $Re = 5\,600$; ligne, $Re = 13\,750$; ligne hachurée + point, $u^+ = y^+$) (d'après Kim [18]).

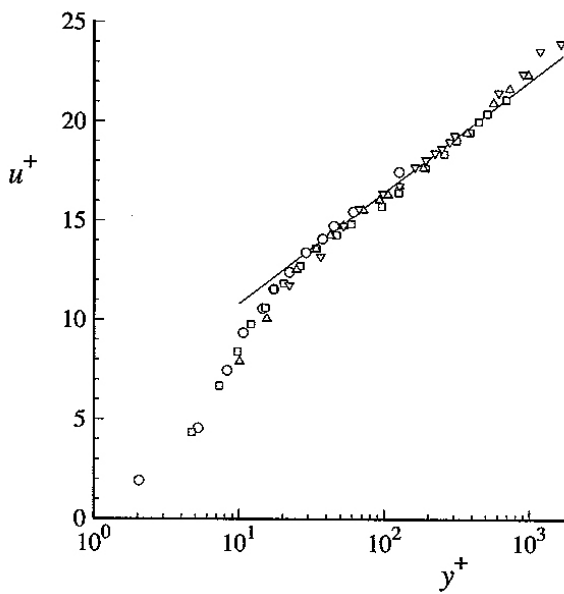
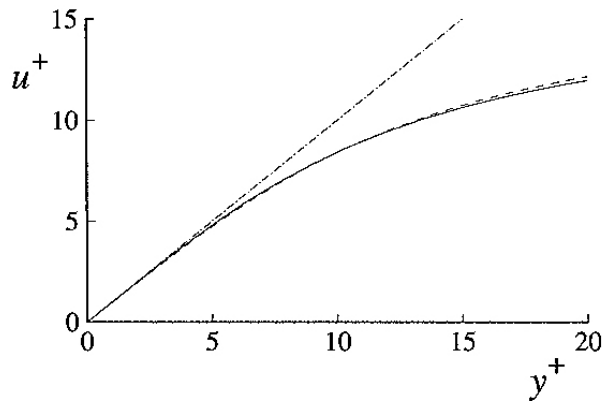


FIGURE 1.8 : Profil de la vitesse moyenne dans la région interne de la couche limite. \circ , $Re = 2\,970$; \square , $Re = 4\,914$; \triangle , $Re = 22\,776$; ∇ , $Re = 39\,582$; ligne, loi logarithmique, Eq. (1.4) (d'après Weil [51]).

fois fonction de y/δ . On entre alors dans une région caractérisée par une loi de vitesse déficitaire et caractérisée par une relation du type :

$$\frac{U_0 - \bar{u}}{u_f} = F\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

où U_0 est la vitesse de l'écoulement principal, et F une fonction à déterminer.

Ce chapitre a présenté la turbulence et ses caractéristiques afin de proposer une définition. Les modèles de turbulence ont pour but de formuler au mieux le compor-

tement des écoulements turbulents. Nous verrons par la suite que ces modèles sont plus ou moins complexes, et basés la plupart du temps sur l'empirisme.

Le prochain chapitre présente brièvement les équations mathématiques traduisant trois principes fondamentaux de la mécanique des fluides : la conservation de la masse, le principe fondamental de la dynamique, et la conservation de l'énergie.

ÉQUATIONS DE LA MÉCANIQUE DES FLUIDES

La prédiction numérique des écoulements de fluide est basée sur la résolution d'équations de bilan traduisant trois principes fondamentaux : (1) la conservation de la masse, (2) le principe fondamental de la dynamique, et (3) la conservation de l'énergie. Les trois équations mathématiques résultantes sont l'*équation de continuité*, le *bilan de quantité de mouvement*, et l'*équation de l'énergie*. Le but de ce chapitre est d'écrire ces équations.

Ces équations de bilan peuvent être écrites sous plusieurs formes (conservatives, non conservatives, etc.) n'entraînant pas de réels changements dans leur compréhension. Néanmoins, celles-ci deviennent importantes en CFD, car une forme particulière peut être efficace dans certains types d'écoulements, alors qu'elle peut conduire à des instabilités de la solution dans d'autres cas.

L'obtention des équations bilan repose sur la définition d'un volume de contrôle de taille importante et finie (Fig. 2.1) ou alors sur un volume élémentaire. Ceux-ci peuvent être fixes ou en mouvement. Dans le premier cas, l'approche *Eulérienne*, le fluide traverse les volumes, alors que dans la deuxième approche, les volumes suivent le mouvement du fluide et sont donc toujours constitués des mêmes particules fluides (on parlera d'approche *Lagrangienne*). Tout se passe donc comme si un observateur suivait le volume et appliquait un bilan sur ce volume. Le principal avantage de ces approches est de focaliser notre intérêt sur une partie de l'écoulement, et non pas sur l'écoulement dans son ensemble.

Une fois ces volumes définis, l'application des principes fondamentaux sur un

volume de contrôle conduit à une écriture intégrale, qui peut être manipulée pour atteindre des relations locales (aux dérivées partielles). Ces dernières sont obtenues directement par l'application des trois bilans sur le volume élémentaire.

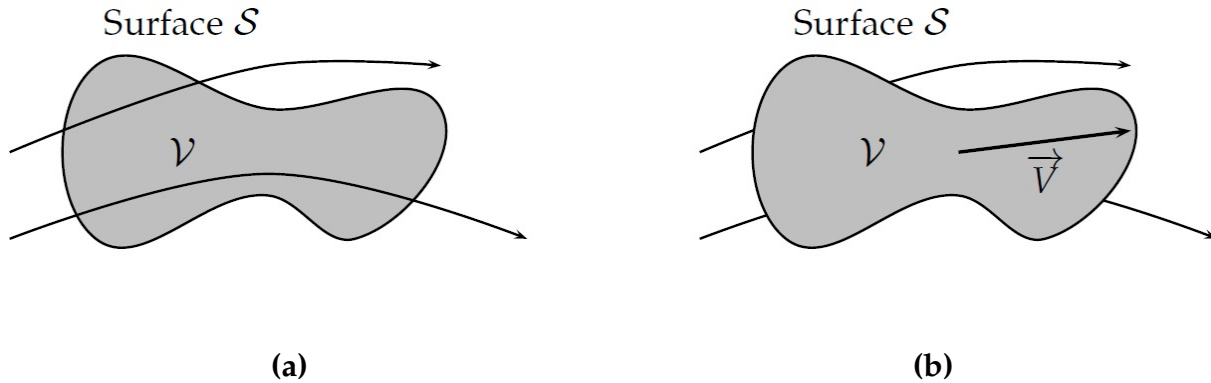


FIGURE 2.1 : Représentation d'un volume de contrôle. Dans le cas (a), le volume de contrôle est fixe et est traversé par le fluide en mouvement ; dans le cas (b), le volume de contrôle est en mouvement, et est alors constitué des mêmes particules fluides.

La suite du document se propose de présenter les équations mathématiques caractérisant l'application des bilans de masse, de quantité de mouvement, et d'énergie sur ces volumes. Avant cette présentation, un rappel sur la dérivée particulaire est effectué.

2.1 Dérivée particulaire

Les particules étant en mouvement, il est parfois utile de connaître la variation d'un paramètre attaché à un volume (de contrôle ou élémentaire) durant son mouvement. Cette variation est à la fois liée au point sur lequel elle est considérée, et aussi qu'en un point elle peut évoluer. Dans le premier cas, la variation dépend du mouvement (dépendance du paramètre par rapport à \vec{x} , t étant fixé), alors que le deuxième est l'instationnarité marquée par la dépendance du paramètre par rapport au temps, \vec{x} étant fixé.

La variation énoncée plus haut est traduit mathématiquement par la dérivée particulaire¹, notée D/Dt , et est écrite :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \quad (2.1)$$

Le terme $\partial/\partial t$ est la dérivée locale et rappelle le fait que la grandeur peut varier au cours du temps pour chacun des points de l'espace (par exemple, la température évolue dans la journée pour tout lieu en France). Le terme $\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}$ est une dérivée "convective" représentant la variation d'un point à un autre de l'espace pour lesquels

1. Une démonstration de cet opérateur est proposée dans de nombreux ouvrages, dont la référence [17].

les propriétés de l'écoulement sont différentes (par exemple, à un instant donné, les températures sont différentes pour tout lieu en France). Ainsi la variation de la température au cours d'un trajet effectuée par un volume de contrôle peut être traduite par la relation :

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z}$$

où u , v , et w sont les trois composantes de la vitesse \vec{V} exprimées dans un repère cartésien.

Nous notons de suite que si on considère un volume (de contrôle ou élémentaire) fixe, le deuxième terme de la dérivée particulaire (2.1) est nul. Ainsi seule la dérivée locale sera considérée. Si maintenant les volumes sont en mouvement, la dérivée particulaire (entière) sera utilisée.

2.2 Équation de continuité

Nous allons appliquer dans cette partie le fait que la masse attachée à un volume d'étude soit conservée. L'équation mathématique résultante est l'équation de continuité.

Conservation de la masse sur un volume de contrôle fixe

On considère un volume de contrôle \mathcal{D} fixe (Fig. 2.1.a) de volume \mathcal{V} , borné par une surface \mathcal{S} de normale extérieure unitaire \vec{n} en chacun des points de sa surface. Dans ce cas, le bilan de débit de masse à travers la surface \mathcal{S}

$$\int_{\mathcal{S}} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} d\mathcal{S}$$

est égale à l'évolution temporelle de la masse du volume au cours du temps. Cette masse est donnée par l'expression

$$\int_{\mathcal{D}} \rho d\mathcal{V}$$

La conservation de la masse pour un volume de contrôle fixe est finalement exprimée par l'équation de continuité sous forme intégrale :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{D}} \rho d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{S}} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} d\mathcal{S} = 0} \quad (2.2)$$

Conservation de la masse sur un volume de contrôle mobile

Considérons cette fois ce même volume en mouvement avec le fluide et pourvu cette fois dans l'écriture d'un indice t pour se rappeler qu'il peut changer de forme au cours du temps (Fig. 2.1.b). Il est donc constitué des mêmes particules fluides. La masse est identique à celle vue précédemment. Le volume étant constitué de volumes élémentaires dotés chacun d'une masse élémentaire ρdV , il n'y a aucune raison pour

que la masse totale ne change au cours du mouvement même si le volume peut voir sa forme évoluer dans son mouvement. Finalement, la conservation de la masse s'écrit alors d'après la définition de la dérivée particulaire :

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \int_{D_t} \rho dV = 0} \quad (2.3)$$

Il s'agit là de l'équation de continuité intégrale faisant apparaître la dérivée particulaire introduite par le fait de considérer le volume de contrôle en mouvement, et sera dénommée *forme non-conservative*. Une équation sera dite sous une forme *conservative* lorsqu'elle pourra s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{F} = 0$$

Cela ne semble pas évident à première vue, mais l'équation (2.2) est de forme conservative, l'intégrale surfacique pouvant être transformée en intégrale volumique avec l'introduction d'un divergent du produit $\rho \times \vec{V}$. Une discussion sur l'intérêt de la forme de l'équation est menée page 34.

Conservation de la masse sur un volume élémentaire fixe

On considère ici un volume élémentaire dV de dimension $dx \times dy \times dz$ (Fig. 2.2) et fixe dans l'espace. Une quantité de masse passe à travers les différentes surfaces de cet élément. Ainsi la masse passant par la surface de gauche vaut $(\rho u) dy dz$, et celle passant par la surface de droite s'écrit

$$\left[(\rho u) + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right] dy dz$$

Le bilan de masse sur ces deux surfaces s'écrit alors :

$$\left[(\rho u) + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right] dy dz - (\rho u) dy dz = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz$$

On peut ensuite effectuer un bilan sur les six surfaces correspondant alors à l'évolution temporelle de la masse dans le volume élémentaire. Il vient alors

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz = - \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$$

On peut finalement écrire la forme différentielle de l'équation de continuité :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right]} = 0 \quad (2.4)$$

que l'on peut aussi écrire

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V})} = 0 \quad (2.5)$$

ou en utilisant l'écriture indiquée :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0} \quad (2.6)$$

Ces équations ont été obtenues en considérant un volume élémentaire fixe dans l'espace et traversé par le fluide. Cette forme différentielle est écrite sous une forme *conservative* identiquement à l'expression (2.2) et à l'opposée de l'expression (2.3).

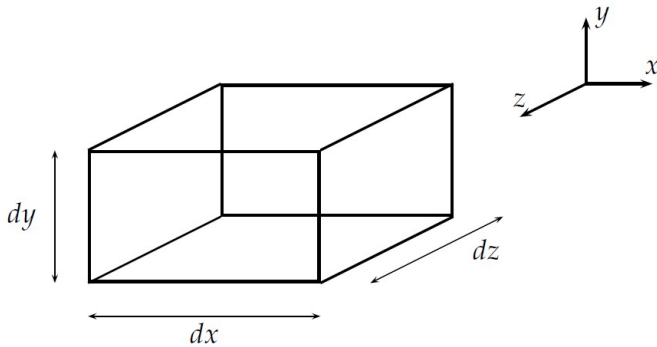


FIGURE 2.2 : Volume élémentaire fixe.

Conservation de la masse sur un volume élémentaire mobile

On considère dans ce cas le volume élémentaire de la partie précédente animé d'un mouvement identique à l'écoulement. Sa masse, notée δm , correspond au produit $\rho \times dV$. Lorsqu'on suit ce volume élémentaire dans son mouvement, la variation de la masse nulle :

$$\frac{D(\delta m)}{Dt} = \frac{D(\rho \times dV)}{Dt} = 0$$

que l'on peut aussi écrire

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left[\frac{1}{dV} \frac{D(dV)}{Dt} \right] = 0$$

On note que le deuxième terme correspond à la variation au cours du temps du volume de l'élément dV considéré (par unité de volume). Cette quantité est directement liée au champ de vitesse, et correspond à la divergence du champ de vitesse. On obtient finalement la relation

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \times \text{div} \vec{V} = 0} \quad (2.7)$$

ou en utilisant l'écriture indiquée

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0} \quad (2.8)$$

Ces relations sont les formes locales (*non conservatives*) de l'équation de continuité atteinte en considérant un volume élémentaire en mouvement.

Discussion sur les quatre équations obtenues

L'application de la conservation de la masse sur des volumes de contrôle ou élémentaire, fixe ou en mouvement, conduit à l'écriture de quatre formes différentes de l'équation de continuité : deux formes intégrales (Eqs. 2.2 et 2.3) et deux formes locales (Eqs. 2.4 et 2.7). Néanmoins, il s'agit là de quatre écritures de la même relation. Chacune de ces équations peut être manipulée afin d'atteindre une autre forme. Le membre de gauche de la relation locale (2.7) peut être modifiée en utilisant la dérivée particulière :

$$\frac{D\rho}{dt} + \rho \times \text{div } \vec{V} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\rho + \rho \times \text{div } \vec{V} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V})$$

correspondant ainsi au membre de gauche de la relation (2.5).

2.3 Bilan de quantité de mouvement

Nous appliquons dans cette partie le Principe Fondamental de la Dynamique énoncé par Newton et appliqué sur des volumes (de contrôle ou élémentaire), animés d'un mouvement aligné sur l'écoulement ou fixes dans l'espace. À l'identique de l'équation de continuité, quatre formes d'équation du bilan de quantité de mouvement seront atteintes.

Le PFD stipule le fait que le produit de la masse d'un élément par son accélération est équilibrée par l'ensemble des efforts extérieurs agissant sur cet élément. Il existe deux types d'efforts : (1) les efforts volumiques agissant à distance comme l'effort de gravité et (2) les efforts surfaciques agissant directement sur la surface extérieure à l'élément considéré.

Nous nous placerons dans le cas du volume de contrôle en mouvement (Fig. 2.3) pour aboutir au bilan de quantité de mouvement.

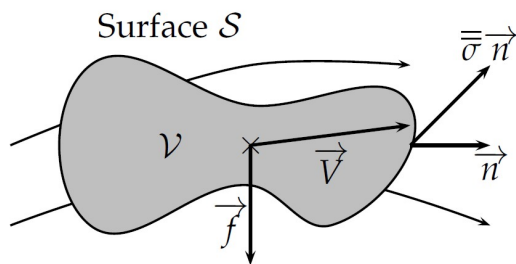


FIGURE 2.3 : Volume de contrôle en mouvement sur lequel s'appliquent des efforts volumiques et surfaciques.

Les efforts volumiques par unité de masse sont notés \vec{f} , tandis que les efforts surfaciques sont représentés par le tenseur des contraintes, noté $\vec{\sigma}$, et évalués en chaque point de la surface par le produit $\vec{\sigma} \vec{n}$. Le tenseur des contraintes est composé d'une contribution liée à la pression et d'une seconde liée à la viscosité du fluide. Il s'écrit lorsque l'on fait l'hypothèse d'un fluide newtonien :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \tag{2.9}$$

Le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué au volume de contrôle en mouvement s'écrit alors

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \int_{D_t} \rho \vec{V} d\mathcal{V} = \int_{D_t} \rho \vec{f} d\mathcal{V} + \int_{S_t} \bar{\sigma} \vec{n} dS} \quad (2.10)$$

Il s'agit là du bilan de quantité de mouvement sous forme intégrale (et *non conservative*).

Autres écritures

L'équation (2.10) a été obtenue en considérant un volume de contrôle en mouvement. Il est possible d'obtenir d'autres formes de cette équation en considérant cette fois le volume comme étant fixe dans l'espace, ou en effectuant le bilan de quantité de mouvement sur un volume élémentaire.

Ainsi l'application du Principe Fondamental de la Dynamique sur un volume de contrôle fixe entraîne la relation :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int_D \rho \vec{V} d\mathcal{V} + \int_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \int_D \rho \vec{f} d\mathcal{V} + \int_S \bar{\sigma} \vec{n} dS} \quad (2.11)$$

On note l'absence de la dérivée particulaire, le volume étant fixe dans l'espace. L'application du PFD sur des volumes élémentaires (fixe ou en mouvement avec le fluide) conduit naturellement à des relations locales.

Si on considère un volume élémentaire fixe, le bilan de quantité de mouvement devient :

$$\boxed{\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}} \quad (2.12)$$

Cette écriture est la forme locale (*conservative*) du bilan de quantité de mouvement. L'application du PFD sur un volume élémentaire mobile conduit à la forme locale (*non conservative*) suivante

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.13)$$

ou, en faisant intervenir la pression et le tenseur des contraintes visqueuses :

$$\boxed{\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}} \quad (2.14)$$

Encore une fois, il est important de comprendre que les expressions (2.10), (2.11), (2.12), et (2.13) ou (2.14) sont des représentations différentes d'une unique équation caractérisant le bilan de quantité de mouvement.

2.4 Équation de l'énergie

Nous appliquons dans cette partie le premier principe de la Thermodynamique stipulant que la variation de l'énergie associé à un volume (de contrôle ou élémentaire)

est égale à l'énergie reçue par celui-ci. Cette dernière est composée d'une partie correspondant au flux de chaleur à travers la surface du volume, et d'une seconde composante liée au travail des efforts surfaciques et volumiques.

Considérons un volume élémentaire en mouvement (Fig. 2.2) auquel on associe une énergie décomposée en une *énergie interne* par unité de masse, notée e , liée au mouvement aléatoire des molécules composant le volume, et une *énergie cinétique* par unité de masse, $V^2/2$, consécutive au mouvement du volume lui-même. Ainsi, l'évolution au cours du temps de l'énergie du volume en suivant son mouvement vaut

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) dx dy dz \quad (2.15)$$

Essayons d'évaluer à présent le travail des efforts extérieurs, estimé par le produit scalaire de l'effort par la vitesse. Ainsi le travail des efforts volumiques agissant sur le volume élémentaire animé d'une vitesse \vec{V} s'écrit

$$\rho \vec{f} \cdot \vec{V} dV \quad (2.16)$$

avec $dV = dx dy dz$ le volume de l'élément considéré. Les efforts surfaciques, quant à eux, impliquent les contraintes de pression et les contraintes visqueuses s'appliquant sur les six surfaces. Nous traiterons uniquement des surfaces ayant une normale selon x , et généraliserons ensuite les formulations obtenues. Ainsi le bilan du travail des efforts de pression sur les surfaces gauche et droite s'écrit

$$\left[up - \left(up + \frac{\partial(up)}{\partial x} dx \right) \right] dy dz = - \frac{\partial(up)}{\partial x} dx dy dz$$

De façon identique, le bilan du travail des efforts visqueux sur les surfaces inférieure et supérieure s'écrit

$$\left[\left(u\tau_{yx} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} dy \right) - u\tau_{yx} \right] dx dz = \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} dx dy dz$$

À cette relation, il faut ajouter la contribution des composantes toujours selon x calculées sur les autres paires de surfaces élémentaires. Ainsi, le bilan sur les surfaces ayant une normale selon x du travail des efforts de pression et de viscosité peut se lire :

$$\left[- \frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zx})}{\partial z} \right] dx dy dz$$

Finalement, en tenant compte des contributions de toutes les composantes cartésiennes, le travail des efforts volumiques et surfaciques s'écrit

$$\left[- \frac{\partial(up)}{\partial x} - \frac{\partial(vp)}{\partial y} - \frac{\partial(wp)}{\partial z} + \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z} \right] dx dy dz$$

Intéressons-nous maintenant au flux de chaleur, celui-ci provenant à la fois d'une absorption ou d'une émission de rayonnement, mais aussi d'un flux de chaleur à travers sa surface consécutivement à un gradient de température. Soit \dot{q} la densité volumique du taux de chaleur. Le taux de chaleur transféré par rayonnement s'écrit alors

$$\rho \dot{q} dx dy dz$$

Notons de la même façon \vec{q} le vecteur densité surfacique de chaleur reçue par le volume par conduction. Comme nous l'avons fait précédemment, on s'intéresse au bilan de chaleur transférée par conduction par les surfaces ayant une normale selon x , soit

$$\left[q_x - \left(q_x + \frac{\partial(q_x)}{\partial x} dx \right) \right] dy dz = -\frac{\partial(q_x)}{\partial x} dx dy dz$$

Le bilan sur l'ensemble des surfaces, en considérant les effets du rayonnement conduit à l'expression

$$\left[\rho \dot{q} - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) \right] dx dy dz$$

Le flux de chaleur par conduction peut être modéliser par la loi de Fourier selon laquelle le flux de chaleur est proportionnel au gradient de température :

$$\vec{q} = -k \overrightarrow{\text{grad}} T$$

Le bilan précédent s'écrit donc

$$\left[\rho \dot{q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \quad (2.17)$$

La forme finale de la conservation de l'énergie appliquée sur un volume élémentaire en mouvement s'écrit à partir des relations mises en évidence précédemment (Eqs. 2.15, 2.16, et 2.17). Il vient

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) = & \rho \dot{q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ & - \frac{\partial(u p)}{\partial x} - \frac{\partial(v p)}{\partial y} - \frac{\partial(w p)}{\partial z} \\ & + \frac{\partial(u \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u \tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u \tau_{zx})}{\partial z} \\ & + \frac{\partial(v \tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v \tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v \tau_{zy})}{\partial z} \\ & + \frac{\partial(w \tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w \tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w \tau_{zz})}{\partial z} \\ & + \rho \vec{f} \cdot \vec{V} \end{aligned} \quad (2.18)$$

La relation (2.18) est la forme non conservative de la conservation de l'énergie obtenue en considérant un volume élémentaire en mouvement. On peut évidemment atteindre

d'autres formes de cette équation en basant notre réflexion sur un volume élément fixe, ou en considérant un volume de contrôle (mobile ou fixe).

On pourrait d'autre part s'intéresser uniquement à la variation de l'énergie interne du volume au cours du temps. Une démarche possible consiste à écrire une équation similaire à l'équation (2.18) mais adaptée à l'énergie cinétique. Cette dernière est facilement atteinte en multipliant la relation (2.14) par u_i faisant apparaître alors l'énergie cinétique. Cette relation est ensuite soustraite de l'équation (2.18). Il vient alors :

$$\begin{aligned} \rho \frac{De}{Dt} = & \rho \dot{q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ & - p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} \\ & + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.19)$$

À ce stade, le nombre de variables inconnues est de sept (u, v, w, p, ρ, e , et T) pour cinq équations. Afin de fermer le problème, on fait souvent l'hypothèse en aérodynamique d'un gaz parfait traduit par une sixième équation, la relation des gaz parfait :

$$p = \rho r T$$

Une septième équation est nécessaire, et provient généralement de la thermodynamique (toutes les équations de l'aérodynamique ayant été trouvées). Il s'agit là de la relation entre l'énergie interne et la température. Pour un gaz parfait, il vient :

$$e = c_v T$$

où c_v est la chaleur spécifique à volume constant.

2.5 Bilan sur les équations obtenues par l'application des principes fondamentaux

Les paragraphes précédentes avaient pour but d'écrire des modèles des trois principes fondamentaux (i.e. conservations de la masse, de la quantité de mouvement, et de l'énergie) appliqués sur des volumes d'étude. Nous avons noté que lorsque le volume était animé d'une vitesse identique à celle de l'écoulement, les équations atteintes étaient de forme non-conservative. Ce qui n'est plus le cas si on considère maintenant un volume fixe dans l'espace. Comprenons tout de même que la distinction forme conservative/forme non conservative ne porte que très peu d'intérêt physique. La subtilité devient important lorsqu'on aborde la CFD, c'est à dire les techniques numériques permettant de prédire un écoulement. En effet, la technique des Volumes Finis, sur laquelle la plupart des codes commerciaux reposent, est tout particulièrement adaptée à la mécanique des fluides car cette technique est basée sur des bilans de flux sur les surfaces des volumes.

D'autre part, les équations précédentes ont été établies sans poser d'hypothèses importantes sur l'écoulement. Ainsi ces équations traitent aussi bien des écoulements compressibles à très hautes vitesses que des écoulements incompressibles visqueux. Néanmoins dans le deuxième cas, il est préférable de simplifier les équations de bilan pour les purger de termes inutiles car négligeables. Nous ne traiterons ici que des écritures locales des équations.

Les équations (2.13) et (2.14) sont les équations de Navier-Stokes, telles qu'ils les ont trouvées indépendamment l'un de l'autre. Cependant, lorsqu'on aborde la CFD, les équations de Navier-Stokes représentent généralement la série d'équations issues des trois principes fondamentaux.

2.6 Conditions limites

Les équations de bilan écrites plus haut décrivent à la fois des écoulements supersoniques, comme des écoulements très visqueux. Et pourtant, il s'agit de la même équation. Le type d'écoulement est alors généré par le type de conditions limites qui sont très différentes dans les deux cas précédents. Celles-ci sont guidées par la physique du problème.

Lorsque le fluide est réel, les particules fluides adhèrent à toute paroi. Cette condition de non-glissement est traduit par l'expression :

$$u = v = w = 0 \quad (\text{en paroi})$$

Si le fluide est dénué de viscosité, et devient alors parfait, la condition devient moins sévère :

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{en paroi})$$

et permet un glissement des particules fluides sur la paroi, seule la composante normale à la surface de la vitesse devenant nulle. De même si cette surface est maintenue à une température constante, T_w , on ajoute alors la condition

$$T = T_w \quad (\text{en paroi})$$

Il se peut néanmoins que dans certaines configurations, la température pariétale reste inconnue et surtout liée au matériau constituant la surface. La condition limite adaptée est alors donnée par le flux de chaleur entre la paroi et le fluide. La condition limite est alors écrite sous forme de gradient à la paroi :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w = -\frac{q_w}{k} \quad (\text{en paroi})$$

où n est la direction normale à la surface, et k la conductivité thermique. Ainsi des conditions de parois adiabatiques seront caractérisées par un gradient de température nul en paroi.

Ce chapitre nous a permis d'écrire trois équations mathématiques traduisant le respect de trois principes fondamentaux de la mécanique des fluides et de la thermique. La prédiction numérique des écoulements par les codes de calculs est basée sur ces trois équations dont l'écriture est adaptée à la discrétisation de la méthode. Le prochain paragraphe présente très brièvement les trois méthodes principales de la résolution numérique des écoulements, et s'attardent tout particulièrement sur les méthodes statistiques.

MODÉLISATION DE LA TURBULENCE

Le chapitre précédent a présenté les équations de mouvement d'un fluide et de transferts thermiques possibles entre un fluide et une paroi. Ces équations sont instantanées et valables pour tous les types d'écoulement. Ce chapitre a pour but de présenter le principe des trois approches numériques DNS, LES, et RANS. Nous nous attarderons tout particulièrement sur la méthode statistique car très employée par les codes du commerce.

Pour des raisons de simplicité d'écriture, seuls les écoulements incompressibles seront développés ici.

3.1 Trois approches numériques

Malgré des efforts importants de recherche depuis plus d'un siècle, la modélisation des écoulements turbulents demeure un défi à relever. Il existe principalement trois axes de recherche, (1) les résolutions numériques déterministes (**DNS**, pour *Direct Numerical Simulation*), (2) les méthodes semi-déterministes (**LES**, pour *Large Eddy Simulation*), et enfin (3) les méthodes statistiques (**RANS** pour Reynolds Average Navier-stokes¹) plus anciennes et donc largement développées.

Ces trois méthodes ont des objectifs et nécessitent des coûts de calcul différents.

1. Le but de cette méthode est en effet d'écrire une équation de Navier-Stokes moyennée à partir d'une décomposition de Reynolds (§3.1.3)

3.1.1 Simulation directe numérique (DNS)

Cette méthode permet de résoudre directement les équations de Navier-Stokes sans aucune modélisation. Elle présente ainsi l'avantage de donner accès à toutes les quantités instantanées considérées dans l'écoulement. Une application possible est donnée sur la figure 3.1 représentant la turbulence créée par un jet d'air issu d'une tuyère.

Tous les mouvements doivent être résolus par cette méthode, la taille de maille doit donc être inférieure à l'échelle de dissipation. Le nombre de mailles est alors important. Ceci a pour conséquence des temps de calcul extrêmement longs, et d'autant plus longs que la vitesse de l'écoulement est élevée². La capacité et la performance des calculateurs actuels ne cessent de progresser mais ne permettent pas encore de sonder des écoulements complexes et à hautes vitesses à partir de cette méthode. Néanmoins, celle-ci permet de mieux comprendre les comportements turbulents dans des configurations simples, mais aussi dans certains cas de valider les modèles de turbulence issus de la modélisation statistique (paragraphe 3.1.3 page 41).

Une alternative à cette méthode est de simuler uniquement les grandes échelles et de modéliser³ les petites : LES.

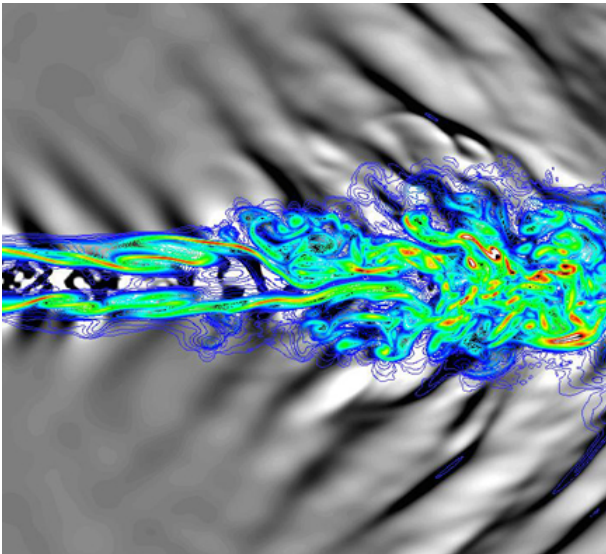


FIGURE 3.1 : Simulation directe numérique d'un jet, $M=1.92$ (d'après Freund [12]).

3.1.2 Simulation des grandes échelles (LES)

Il s'agit d'une méthode numérique intermédiaire entre la DNS et les méthodes statistiques consistant à appliquer un filtre spatial en tout point du domaine. Cette

2. Pour exemple, la simulation d'un jet d'air issu d'une tuyère de rayon $r = 1$ cm dans un domaine d'étendu $0 < x/r < 40$, $-15 < y/r < 15$, $-15 < z/r < 15$ nécessite une grille de 12 millions de points et un temps de calcul de 100 h sur un super ordinateur.

3. On remarquera ici la distinction entre **simuler** un écoulement, c'est à dire calculer numériquement à partir des diverses équations, et **modéliser**, c'est à dire utiliser une loi qui rend compte du phénomène physique.

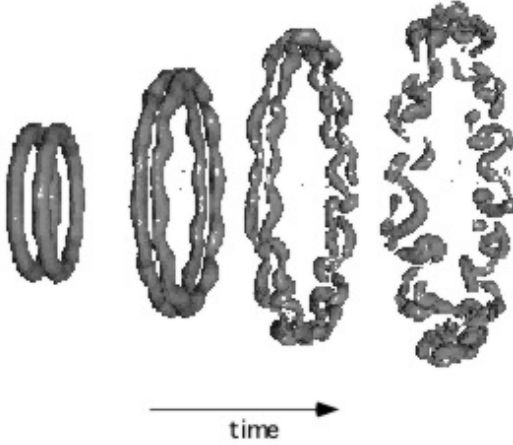


FIGURE 3.2 : Simulation des grandes échelles : collision axiale de deux anneaux tourbillonnaires (d'après Mansfiel [28]).

méthode a été proposée par Joseph Smagorinsky pour simuler les écoulements atmosphériques [47]. Le champ filtré est obtenu par un produit de convolution dans l'espace :

$$\tilde{\phi}(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{D}} \phi(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

où \mathcal{D} est le domaine de calcul, et G le filtre déterminant la taille des tourbillons à simuler. Le filtre sépare donc les grandes échelles (simulées) des petites structures (modélisées). On suppose ici que le comportement de ces dernières ne dépend pas de la géométrie et est donc isotrope, ce qui n'est pas le cas des grandes échelles qui, elles, voient leur comportement guidé par leur environnement. La simulation des grandes échelles reste néanmoins très délicate car elles ont un comportement anisotrope, elles sont sujettes à des effets historiques, et sont fortement dépendante du type d'écoulement et de ses conditions aux limites. La taille de maille est choisie largement supérieure à l'échelle de Kolmogorov et correspond la plupart du temps à la taille du filtre. Le filtrage précédent s'écrit alors :

$$\tilde{\phi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}} \phi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad \mathbf{x}' \in \mathcal{V}$$

avec V le volume de la maille. Ainsi, dès lors que ce filtrage est appliqué au champ de vitesse, la vitesse instantanée peut être décomposée de la sorte :

$$u_i(x_i, t) = \tilde{u}_i(x_i, t) + u_i'(x_i, t)$$

L'équation de Navier-Stokes filtrée s'écrit alors :

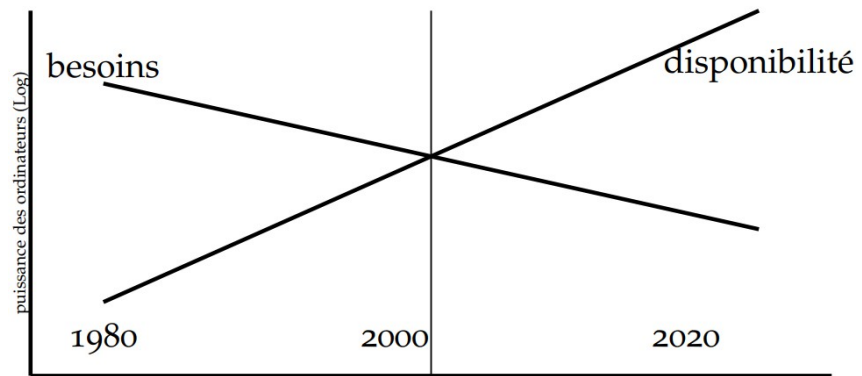
$$\rho \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_i \tilde{u}_j) \right) = \rho \tilde{f}_i - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.1)$$

Le terme $\tilde{u}_i \tilde{u}_j$ pose un problème d'indétermination qui tentera d'être levé à partir d'un modèle de sous-maille proposé par Smagorinsky :

$$\tilde{u}_i \tilde{u}_j = -\mu_{SGS} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

Cette relation, nous le verrons plus tard, est semblable à l'hypothèse de Boussinesq. Malgré la modélisation des petites structures, le temps de calcul demeure important et les calculs sont limités, comme pour la DNS à des nombres de Mach faibles. Néanmoins, alors que la puissance de nos ordinateurs personnels étaient insuffisantes pour ces types de calcul, depuis les années 2000 la tendance s'est inversée (Fig. 3.3).

FIGURE 3.3 : Illustration des puissances disponibles et nécessaires pour un calcul numérique basé sur la méthode LES (D'après Pope [38]).



La figure 3.2 propose un exemple de calcul possible : la collision de deux anneaux tourbillonnaires en vue d'une meilleure compréhension des interactions entre les structures turbulentes. La figure 3.4 montre une autre forme d'interaction, ici entre deux tourbillons, résultant sur l'appariement des deux structures. Les études fondamentales ont aussi pour objectif de simuler et prédire ces comportements.

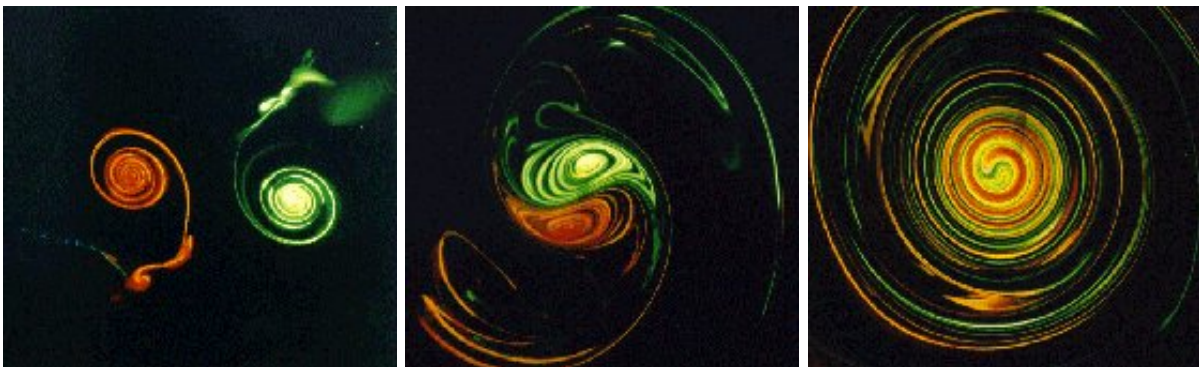


FIGURE 3.4 : Observation de l'appariement de deux tourbillons (visualisation expérimentale de l'Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre [1]).

La **DNS** et la **LES** sont très prometteuses car la perte d'informations est minimale pour la première (seules les contributions moléculaires sont filtrées), un peu plus importante pour la deuxième. Cependant, le coût d'un calcul est inversement proportionnel à la précision obtenue. Pour cette raison, dans des configurations industrielles, ces deux méthodes sont inutilisables, et on leur préférera les méthodes statistiques exposées dans la suite du document.

3.1.3 Modélisation statistique de la turbulence (RANS)

La stratégie adoptée ici consiste à mettre de côté le mouvement instantané du fluide, dans le but d'exprimer les équations du champ moyen. Le souci de simuler toutes les petites structures de l'écoulement est donc éliminé. La taille de maille, ainsi que la valeur des pas de temps pour des études instationnaires, deviennent plus importantes. Cette approche est donc moins coûteuse en temps de calcul que la **DNS** et la **LES**, ceci expliquant sa grande utilisation dans le monde industriel. Néanmoins, notons tout de suite que cette approche présente un fort degré d'empirisme, rendant alors la méthode peu fiable dans certaines configurations. Le domaine d'application est très vaste, avec transfert thermique (Fig. 3.5) ou sans échange thermique (Fig. 3.6).

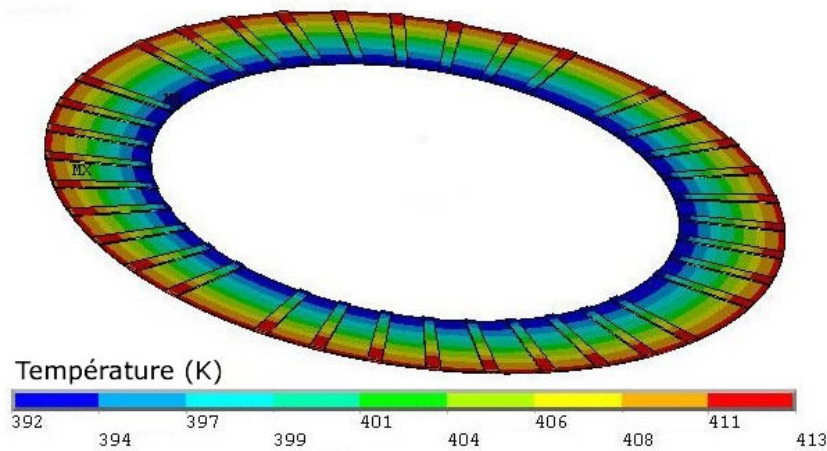


FIGURE 3.5 : Température dans un film d'huile cisailé par deux disques en rotation symbolisant un embrayage en position ouverte. L'huile entre dans le domaine de fluide par le rayon le plus faible, est réchauffée par le flux de chaleur imposé sur les surfaces inférieure et supérieure de l'embrayage et ressort du domaine plus chaud (d'après Chagnenet *et al.* [7]).

Le principe de cette méthode repose sur la résolution des équations de Navier-Stokes moyennées. Celles-ci sont obtenues en introduisant une décomposition des variables du problème à traiter :

$$\phi(x_i, t) = \bar{\phi}(x_i) + \phi'(x_i, t)$$

où $\bar{\phi}(x_i)$ est la moyenne du paramètre $\phi(x_i, t)$ sur une durée d'observation T :

$$\bar{\phi}(x_i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \phi(x_i, t) dt$$

avec $\phi = \{u_i, p, T\}$. La durée d'observation doit être importante comparativement à l'échelle de temps de la turbulence, théoriquement elle doit tendre vers l'infini. Cependant si elle est assez grande, la valeur moyenne n'en dépend plus. Cette décomposition appelée décomposition de Reynolds (1894), a été introduite par Boussinesq⁴ (1872).

4. Valentin Joseph Boussinesq (1842-1929), physicien et mathématicien français. Boussinesq apporta une contribution énorme à la physique mathématique. Et son travail en hydraulique est considérable. Il étudia les tourbillons, les ondes de surface, la résistance à l'avancement d'un obstacle, et les effets refroidissant d'un liquide.

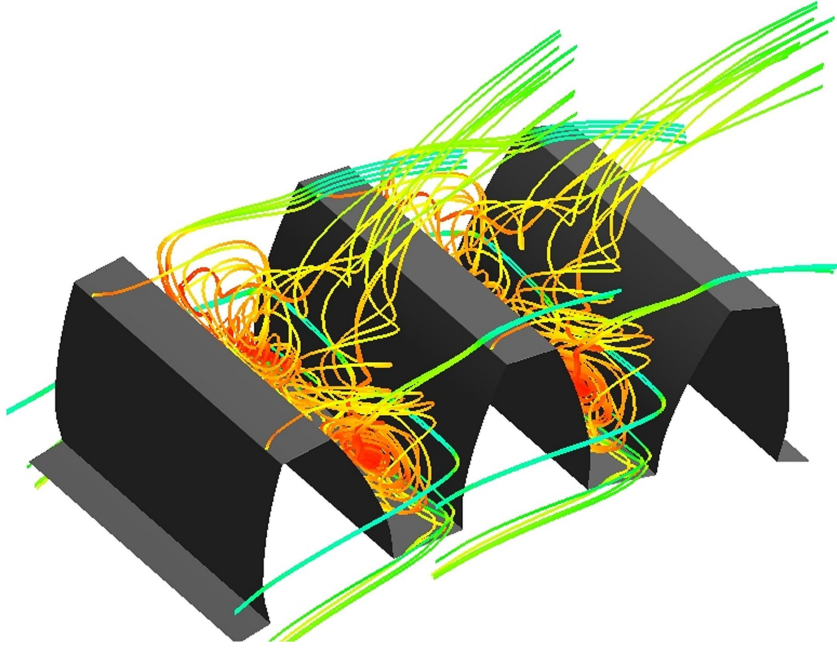


FIGURE 3.6 : Écoulement d'air au passage d'une roue dentée en rotation. On note ici l'aspiration axiale de l'écoulement dans la région entre deux dents, une recirculation prenant place dans cette région puis une éjection radiale par effet centrifuge — $D_p = 150$ mm, $m = 5$ mm, largeur = 24 mm (d'après Pallas *et al.* [35]).

On suppose dans cette décomposition que les valeurs fluctuantes sont centrées, c'est à dire que leurs valeurs moyennes sont nulles, $\overline{\phi'} = 0$. Les propriétés les plus utilisées sont les suivantes :

$$\overline{(\phi)} = \overline{\bar{\phi} + \phi'} = \bar{\phi} + \overline{\phi'} = \bar{\phi} \quad \text{et} \quad \overline{\phi\psi} = \bar{\phi} \times \bar{\psi} + \overline{\phi'\psi'}$$

Il existe d'autres décompositions, telle que la décomposition triple : $\phi = \bar{\phi} + \tilde{\phi} + \phi'$, composante moyenne, organisée, et aléatoire. Cette décomposition est très utilisée dans la modélisation de la turbulence atmosphérique, cas où les tourbillons gardent longtemps une structure fluctuante organisée. Ce formalisme étant plus complexe, on regroupe parfois la composante moyenne et la composante organisée dans un terme unique. On obtient alors une décomposition équivalente à la décomposition de Reynolds. Lorsque les effets de compressibilité deviennent non-négligeables, la décomposition de Fabre est préférée à celle de Reynolds car plus adaptée à ce type d'écoulement. On définit dans ce cas la moyenne massique, $\tilde{\phi} = \overline{\rho\phi}/\bar{\rho}$, permettant de mieux tenir compte des variations de masse volumique.

Notons au passage que l'application de la moyenne de Reynolds conduit à une gigantesque perte d'information. Il devient alors illusoire d'essayer d'obtenir par cette approche un modèle capable de reproduire correctement tous les phénomènes, dans toutes les simulations. Cette réflexion renvoie à la notion d'universalité des modèles. Les décompositions des variables de notre problème, $u_i = \bar{u}_i + u'_i$ et $p = \bar{p} + p'$, sont introduites dans les équations précédentes. On obtient alors

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.2)$$

et

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \right) = \rho \bar{f}_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j}$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante en utilisant le fait que $\partial u'_i / \partial x_i = 0$:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = \rho \bar{f}_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\tau}_{ij} - \overline{\rho u'_i u'_j}] \quad (3.3)$$

Les deux relations (3.2) et (3.3) représentent les **équations de Navier-Stokes moyennées**. On remarque que l'équation de bilan moyennée (3.3) semble identique à celle écrite pour l'écoulement instantané, à l'exception cependant d'un terme ajouté, $-\overline{\rho u'_i u'_j}$, ayant la dimension d'une contrainte. Ce terme porte le nom de **tenseur de Reynolds**. Ainsi le champ moyen ne satisfait pas aux équations de Navier-Stokes, telles que nous les avons écrites dans le précédent chapitre, le tenseur de Reynolds faisant apparaître le lien étroit entre les champs moyen et fluctuant.

On note ainsi que la turbulence apporte une contrainte supplémentaire à l'écoulement. Néanmoins, les contributions des contraintes de cisaillement et de celles liées à la turbulence ne sont pas identiques. En effet, les effets visqueux sont dominants dans la région proche des parois, alors que pour des régions qui en sont éloignées, la contrainte turbulente a une contribution plus importante (Fig. 3.7).

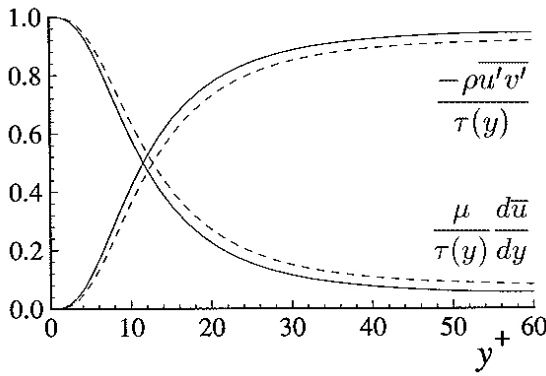


FIGURE 3.7 : Répartition des contraintes de cisaillement et turbulentes (normalisées par la contrainte totale, $\tau(y)$) dans le cas d'un écoulement dans un canal. Lignes continues, $Re = 13\,750$; lignes discontinues, $Re = 5\,600$ (d'après Moser [34]).

Limitant la description au champ moyen $[\bar{u}_i(x_j, t), \bar{p}(x_j, t)]$, le système régissant ces fonctions se réduit en situation isovolumique aux équations (3.2) et (3.3). Le tenseur de Reynolds fait donc apparaître six termes supplémentaires ($\overline{\rho u'^2}$, $\overline{\rho v'^2}$, $\overline{\rho w'^2}$, $\overline{\rho u'v'}$, $\overline{\rho u'w'}$, et $\overline{\rho v'w'}$) s'ajoutant aux variables habituelles (\bar{u} , \bar{v} , \bar{w} , et \bar{p}). Il y a donc 10 inconnues pour 4 équations, et il est alors nécessaire de trouver une stratégie nous permettant de "fermer" ce système. D'un point de vue général, il existe deux approches permettant d'estimer les composantes du tenseur de Reynolds : (1) une modélisation de ces contraintes turbulentes par une loi algébrique relative aux grandeurs moyennes (approche du premier ordre). Cette approche nécessite néanmoins dans la plupart des cas la résolution d'équations aux dérivées partielles (i.e. équations de transport) supplémentaires utilisées pour l'évaluation locale des échelles caractéristiques de la turbulence à modéliser. (2) une simulation des composantes $\overline{u'_i u'_j}$ à partir de son

équation de transport (approche du second ordre). Cette approche génère cependant un tenseur d'ordre plus élevé que l'on cherchera à modéliser.

3.1.4 Remarques sur les trois approches

Nous venons de décrire de façon succincte les trois grandes méthodes numériques actuelles. Leurs domaines de modélisation (quand il existe) et de simulation sont rassemblés sur la figure 3.8. D'après ce que nous venons de voir, plus le domaine de modélisation est faible, plus le calcul sera à même de donner une description précise de l'écoulement. Cependant, celui-ci nécessite alors une taille de maille très fine, entraînant irrémédiablement des temps de calculs coûteux. Pour cela, la modélisation statistique semble séduisante car plus rapide. Néanmoins, l'utilisateur s'embarque dès lors dans le choix de modèles de turbulence⁵.

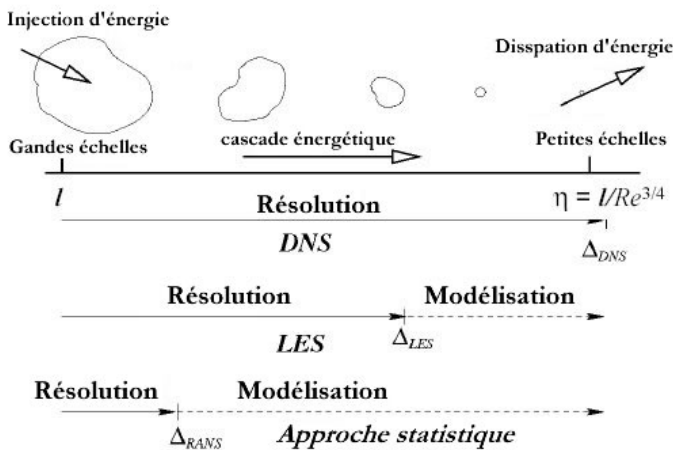


FIGURE 3.8 : Représentation des domaines de simulation et de modélisation pour la DNS, la LES et la modélisation statistique.

3.2 Modèle de turbulence du premier ordre - Concept de la viscosité turbulente

L'approche de la modélisation statistique de la turbulence nécessite la fermeture du système d'équations régissant le mouvement moyen. Généralement, les méthodes de fermeture sont classées en fonction du nombre d'équations supplémentaires à résoudre. La stratégie adoptée par les modèles du *premier ordre* et présentés dans la suite du document repose sur le concept de **viscosité turbulente** présenté par Bousinesq en 1877 à partir d'une analogie sur la théorie cinétique des gaz[4]. Son idée est basée sur l'observation tendant à montrer que le transfert de quantité de mouvement dans un écoulement turbulent est fortement dominé par le mélange des grosses structures. Cette viscosité est notée μ_T et relie linéairement le tenseur de Reynolds à

5. Il utilisera dans la plupart des cas le modèle ke qui, il est vrai prédit des écoulements corrects mais aussi pour des raisons d'ignorance d'autres modèles.

l'écoulement moyen :

$$\overline{\rho u'_i u'_j} = -\mu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \underbrace{\frac{2}{3} \rho \bar{k} \delta_{ij}}_{(a)} \quad (3.4)$$

où \bar{k} est l'énergie cinétique moyenne du champ turbulent par unité de masse, appelée de façon plus concise **l'énergie cinétique turbulente** :

$$\bar{k} = \frac{1}{2} \overline{u'_k u'_k} = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$$

et δ_{ij} le symbole de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$). Le terme isotrope (a) est nécessaire, afin de ne pas avoir $\rho \bar{k} = \overline{\rho u'_i u'_i} / 2 \equiv 0$ par contraction des indices⁶. La viscosité est *a priori* une fonction locale de l'écoulement $\mu_T \equiv \mu_T(\vec{x}, t)$ et donc fonction du mouvement turbulent, contrairement à la viscosité moléculaire qui est une propriété du fluide.

La relation (3.4) repose sur des hypothèses simplificatrices de l'écoulement et sa turbulence : (1) l'instantanéité de la réponse de la turbulence à une variation du champ moyen, c'est à dire la non prise en compte de l'histoire de la déformation et de la turbulence. Ce point n'est pas observé expérimentalement si on considère par exemple une contraction axisymétrique d'une conduite dans laquelle une turbulence homogène est convectée. Dans cette configuration après passage dans cette contraction la turbulence nécessite en effet un temps d'adaptation pour retrouver des propriétés d'isotropie, temps caractéristique d'une mémoire de la turbulence [37]; (2) la localité, la turbulence étant influencée que par son voisinage immédiat, (3) la faible inhomogénéité; (4) la linéarité de cette loi de comportement entraînant une surestimation de la production de la turbulence. La trop forte diffusivité turbulente est ainsi à l'origine de la dissipation anticipée des structures turbulentes. Ce dernier point est probablement celui qui fait le plus défaut à cette approche. En effet, la relation (3.4) est bien adaptée à la reproduction des composantes de cisaillement (i.e. $\overline{u'v'}$ et $\overline{v'w'}$) qui sont produites respectivement par le cisaillement dû au sillage et à la couche limite. En revanche, elle est incapable de distinguer les trois composantes diagonales, prédisant tout simplement $\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2} = 2\bar{k}/3$. On comprendra mieux que les modèles du premier ordre ne puissent marcher dans toutes les situations. Ceci est grandement amélioré par l'introduction d'une relation non-linéaire de la loi de comportement du "matériau turbulent" par l'intermédiaire de termes quadratiques voire cubiques des gradients de vitesses moyennes. Notons d'ailleurs que la méthode DNS n'a pas montré de corrélation entre les termes des membres de gauche et droite de l'équation (3.4)[44].

La viscosité turbulente, inconnue de prime abord, doit donc être définie. Par analogie avec la théorie cinétique des gaz, la détermination de la viscosité nécessite deux échelles, $\nu \sim u \times l$, où u est la vitesse quadratique des molécules constituant le gaz et

6. En effet, sans ce terme, $\overline{\rho u'_i u'_i} = 2\rho \bar{k} = -2\mu_T \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i}$, ce dernier terme étant nul d'après la relation (3.2).

l le libre parcours moyen de ces particules (i.e. la distance moyenne effectuée par ces particules entre deux chocs). On pourra alors écrire dans notre cas :

$$\mu_T = \rho u_T l \quad (3.5)$$

où u_T et l représentent respectivement une vitesse et une longueur caractéristique de la turbulence locale. Ainsi, le propos des modèles de turbulence est d'estimer ces deux échelles de la turbulence afin d'approcher au mieux la valeur de μ_T . Le modèle de turbulence sera d'autant plus complexe qu'il cherchera à se rapprocher au plus près de la réalité, à savoir tenir compte des effets de la convection, de la production et de la dissipation de la turbulence le long de l'écoulement.

3.2.1 Modèle algébrique ou modèle à zéro équation

Les modèles les plus simples estiment la viscosité turbulente μ_T à partir du champ moyen (ou son gradient) et d'une échelle spatiale estimée à partir de formules empiriques. Étant donnée l'absence de nouvelles équations (de transport) ces modèles sont appelés *modèles à zéro équation*. Prandtl⁷ [39] par exemple propose en 1925 une formulation de la viscosité turbulente utilisant le concept de *longueur de mélange*, l_m , telle que

$$\mu_T = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (3.6)$$

Cette longueur, inspirée du libre parcours moyen dans la théorie cinétique des gaz repose sur le principe que le transport de la quantité de mouvement s'effectue sur une distance égale au libre parcours moyen. L'expression de cette longueur dépend de la configuration étudiée. Le tableau 3.1 rassemble quelques valeurs de longueurs de mélange dans des configurations fréquemment étudiées.

Ce modèle a un degré de généralité très faible puisque dépendant du type d'écoulement envisagé. Cependant lorsqu'il est appliqué dans des configurations d'écoulement adaptées, les prédictions numériques sont proches de celles mesurées (Fig. 3.9). Ce modèle est dit *incomplet* car pour décrire la longueur de mélange en fonction de la position celle-ci dépend de l'écoulement. D'autre part, cette vision de la turbulence est trop simpliste, car la longueur doit être différente que l'on se positionne dans l'écoulement ou proche des parois⁸. Il semble en pratique que le concept de viscosité turbulente sous cette forme est trop imprécis pour permettre des prédictions satisfaisantes.

7. Ludwig Prandtl (1875-1953), aérodynamicien allemand. Il est le père de l'aérodynamique en mettant en évidence la présence d'une couche limite près des parois. Ceci permit d'expliquer les phénomènes de portance et de traînée nécessaires à l'amélioration de l'aviation. Il fut le directeur de thèse de Paul Richard Heinrich Blasius, qui utilisa le concept de couche limite dans l'estimation de la traînée d'une plaque plane. Il montra aussi que les pertes de charge dans une conduite est fonction du nombre de Reynolds.

8. Des modifications ont été apportées au modèle de longueur mélange pour tenir compte des effets de parois. Van Driest, Clauser et Klebanoff proposent par exemple un modèle de longueur de mélange réduite dans la région laminaire de la couche limite par l'utilisation d'un facteur jouant le rôle d'amortisseur.

TABLE 3.1 : Longueurs de mélange dans le cas d'écoulements bidimensionnels (d'après Rodi [42]).

Écoulement	Longueur de mélange, l_m	L
Couche de mélange	$0,07L$	épaisseur de la couche de mélange
Jet	$0,09L$	demi-épaisseur du jet
Sillage	$0,16L$	demi-épaisseur du sillage
Jet axisymétrique	$0,075L$	demi-épaisseur du jet
Couche limite :		
– Sous-couche visqueuse et région logarithmique	$\kappa[1 - \exp(-y^+ / 26)]$	épaisseur de la
– Partie supérieure ($y/L \geq 0,22$)	$0,09L$	couche-limite

De plus, si on se place au centre d'une couche de mélange caractérisée par un gradient de vitesse nul, la viscosité turbulente y devient nulle d'après la relation (3.6), ce qui est réfuté par les mesures. Il devient alors nécessaire d'avoir recours à d'autres théories pour mettre en évidence les diverses interactions entre les instabilités de tailles différentes.

Pour toutes ces raisons le modèle de longueur de mélange n'est pas applicable dans une modélisation générale de la turbulence. De ce fait, il sera inséré dans des modèles de turbulence plus complexes pour traiter par exemple le comportement du fluide dans les régions proches des parois.

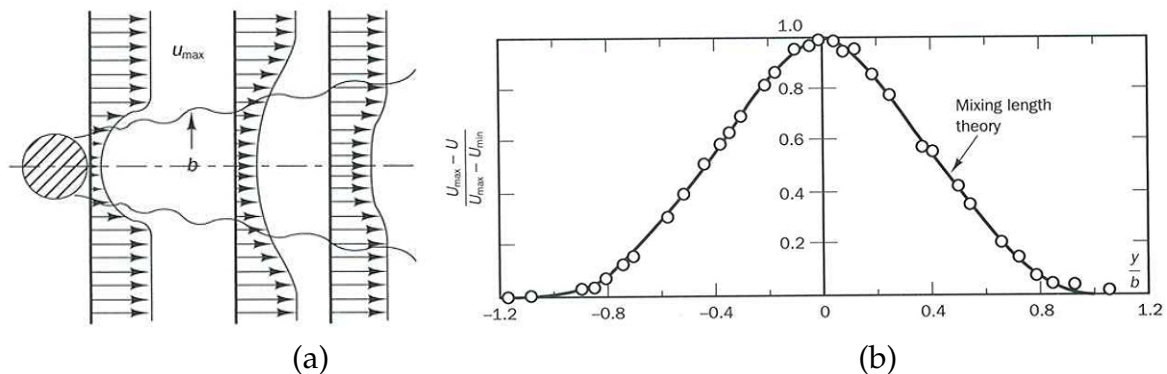


FIGURE 3.9 : Schéma d'un sillage (a) et prédictions numériques du champ de vitesse dans le sillage d'un obstacle cylindrique circulaire utilisant le concept de longueur de mélange (d'après Versteeg [50] et Schlichting [43]).

3.2.2 Modèles de fermeture à une équation de transport

Les modèles de fermeture à une équation de transport reposent sur l'hypothèse de Boussinesq, et permettent d'ôter le problème d'une viscosité turbulente nulle au milieu d'une couche de mélange. On présente dans la suite deux exemples de ces modèles à 1 équation.

Modèle de fermeture basé sur l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente

Prandtl et Kolmogorov [19] proposent en 1940 une relation dans laquelle la viscosité turbulente est proportionnelle à la racine carrée de l'énergie cinétique turbulente :

$$\mu_T = C_k \rho l \sqrt{\bar{k}} \quad (3.7)$$

Le choix du paramètre k vient naturellement de sa présence dans la loi de comportement (3.4). Cette approche est ainsi basée sur la connaissance en tout point de l'écoulement de l'énergie cinétique turbulente :

$$\underbrace{\rho \left(\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right)}_{[1]} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right)}_{[2]} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\rho}{2} \overline{u'_j u'_i u'_i} + \overline{p' u'_j} \right)}_{[3]} - \underbrace{\rho \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{[4]} - \underbrace{\mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}_{[5]}$$

La **variation totale de l'énergie cinétique turbulente** [1] est équilibrée par :

- [2] la diffusion de l'énergie cinétique turbulente par effets visqueux.
- [3] la diffusion de l'énergie cinétique turbulente par effet des fluctuations de vitesse et de pression.
- [4] l'interaction avec l'écoulement moyen traduisant le fait que les grosses structures turbulentes ponctionnent de l'énergie de l'écoulement moyen (Cf. discussion page 16). Ce terme, appelé terme de **production**, si on considère le signe moins est toujours positif.
- [5] le taux de dissipation moyen (multiplié ici par la masse volumique), noté par la suite $\bar{\epsilon}$, et toujours positif. Ce terme est responsable de la transformation de l'énergie cinétique turbulente en énergie thermique par les petites structures.

Le terme de diffusion [3] doit être modélisé, c'est généralement le cas à l'aide d'un terme de diffusion par gradient :

$$- \left(\frac{\rho}{2} \overline{u'_j u'_i u'_i} + \overline{p' u'_j} \right) \approx \frac{\mu_T}{\sigma_k} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \quad (3.8)$$

où μ_T est la viscosité turbulente vue plus haut, et σ_k est le nombre de Prandtl turbulent (proche de l'unité). On suppose là que les deux termes ont des effets diffusifs, et peuvent donc être modélisés de façon identique. Ceci serait parfaitement justifié si l'agitation turbulente avait un comportement de pure agitation (au sens moléculaire), et à une échelle très petite devant celle de l'écoulement moyen. Il n'en est rien. En effet, la présence de structures cohérentes dans la turbulence va à l'encontre de toute séparation d'échelles.

De la même manière, le terme de production [4] doit être modélisé, ceci est réalisé à partir de la définition de la viscosité turbulente (3.4) :

$$P_k = -\rho \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \approx \mu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

L'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente est écrite à partir d'une analogie avec l'équation de transport de l'énergie cinétique (approche phénoménologique), et non pas à l'aide d'une approche théorique. On cherche donc à équilibrer le transport du taux de dissipation par un terme de convection, un terme source, un terme puits, de la diffusion visqueuse et turbulente. On peut ainsi écrire :

$$\frac{\partial(\rho\bar{k})}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial(\rho\bar{k})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho\bar{\epsilon} \quad (3.9)$$

Cette approche, plus qu'osée, est très largement utilisée aujourd'hui. Elle est loin d'être parfaite, mais personne n'a proposé autre chose pour le moment. Ce modèle dispose finalement de cinq équations pour les cinq fonctions scalaires \bar{u}_i , \bar{p} et \bar{k} . Il a l'avantage d'être peu complexe à mettre en place, et prend en compte partiellement l'"histoire de la turbulence". Ce modèle, comme le précédent, reste incomplet car nécessitant de prescrire l'échelle de longueur en tout point, ce qui reste difficile pour des géométries complexes.

L'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente reste valable pour des écoulements très fortement turbulents. C'est à dire dans les régions éloignées des effets des parois (i.e. y^+ supérieur à 30).

Modèle de fermeture de Spalart et Allmaras basé sur l'équation de transport de la viscosité $\tilde{\nu}$

Un des modèles de turbulence à 1 équation de transport, autre que celle de l'énergie cinétique turbulente, le plus célèbre est le modèle proposé par Spalart et Allmaras [48]. Ce modèle a été adapté à des configurations de couches de mélange 2D et de couches limites sur des plaques planes. La viscosité turbulente est donnée par la formulation :

$$\mu_T = \rho f_{v1} \tilde{\nu} \quad (3.10)$$

où $\tilde{\nu}$ est obtenue par résolution de son équation de transport :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\tilde{\nu}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\tilde{\nu}u_j) = P_\nu + \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\mu + \rho\tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right\} + C_{b2}\rho \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right)^2 \right] - D_\nu \quad (3.11)$$

où P_ν représente la production de viscosité turbulente et D_ν sa destruction dans les régions proches des parois liée à l'amortissement visqueux. $\sigma_{\tilde{\nu}}$ et C_{b2} sont des constantes, et μ est la viscosité dynamique.

Le modèle de turbulence proposé par Spalart et Allmaras est un modèle dît *bas-Reynolds*, c'est à dire construit de telle sorte qu'il puisse être utilisé dans les régions de paroi. Ceci est possible à partir du comportement du coefficient f_{v1} dans l'expression (3.10). Aucune loi de paroi n'est alors nécessaire. Certains codes de calculs commerciaux proposent néanmoins une modification de ce modèle adaptée à l'utilisation d'une loi de paroi diminuant alors le nombre de mailles dans la région de paroi. Ce modèle est performant pour des applications aéronautiques car les écoulements attachés et décollés sont très bien représentés. Cependant, ce modèle est bien trop

simple dans sa construction pour donner de bons résultats dans une large gamme d'écoulements. En effet, son manque d'universalité lui fait défaut. Ce point est amélioré en considérant des modèles à deux équations de transport.

3.2.3 Modèles de fermeture à deux équations de transport

Afin de lever ce problème d'empirisme concernant l'échelle de longueur, il est vite apparu naturel de calculer cette grandeur en résolvant une équation de transport supplémentaire. On accède ainsi aux méthodes du premier ordre à deux équations. Nous l'avons vu précédemment, il est très naturel d'introduire l'énergie cinétique turbulente dans la prédiction de la viscosité turbulente. Le choix du second paramètre, à partir duquel une équation de transport sera écrite, est plus délicat. Plusieurs suggestions ont été proposées basées sur les variables

$$\epsilon \quad \bar{k}l \quad \bar{\omega} \quad 1/\omega$$

où ϵ et ω sont respectivement le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente et le taux de dissipation spécifique ($\omega = \epsilon/k$) représentant le taux de dissipation par unité d'énergie cinétique turbulente. Dans tous ces cas, la viscosité turbulente est formulée à partir de l'énergie cinétique turbulente et du second paramètre.

Modèle de fermeture $k\epsilon$

Le modèle de fermeture $k\epsilon$ a été l'un des modèles le plus utilisé dans le monde industriel. La viscosité turbulente est donnée par l'expression :

$$\mu_T = \rho C_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\epsilon}} \quad (3.12)$$

et est donc écrite par combinaison de l'énergie cinétique turbulente et du taux de dissipation

$$\bar{\epsilon} = \nu \frac{\overline{\partial u'_i \partial u'_i}}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3.13)$$

L'énergie cinétique turbulente et le taux de dissipation peuvent être estimés tous deux par leur équation de transport. Celle de l'énergie a été écrite au-dessus (p. 48) et a été simplifiée à l'expression (3.9). L'équation de transport exacte du taux de dissipation peut être obtenue [53] mais reste très complexe, même si quelques termes sont négligés. Une autre stratégie consiste alors à s'inspirer de l'équation de transport finale de l'énergie cinétique turbulente et construire ainsi une équation de transport du taux de dissipation par similarité. Celle-ci doit donc faire apparaître des termes de convection, de diffusion, de production, etc. On obtient finalement les équations suivantes, pour \bar{k} et $\bar{\epsilon}$:

$$\frac{\partial(\rho\bar{k})}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial(\rho\bar{k})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho\bar{\epsilon} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial(\rho\bar{\epsilon})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i \bar{\epsilon})}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_j} \right] + \frac{\bar{\epsilon}}{k} (C_{1\epsilon} P_k - C_{2\epsilon} \rho \bar{\epsilon}) \quad (3.15)$$

Dans les équations (3.14) et (3.15), P_k caractérise la génération d'énergie cinétique turbulente issue de gradient de vitesse moyenne, et des effets de la pesanteur. $C_{1\epsilon}$, $C_{2\epsilon}$ sont des constantes. σ_k et σ_ϵ sont appelées nombre de Prandtl, respectivement pour k et ϵ ⁹. Les constantes impliquées dans ce modèle, que l'on souhaite les plus universelles possibles, ont été déterminées dans les configurations de référence suivantes :

C_μ	= 0,09	Loi logarithmique en paroi
$C_{1\epsilon}$	= 1,44	déformation ou cisaillement uniforme
$C_{\epsilon 2}$	= 1,92	décroissance turbulente isotrope
σ_k	= 1	comparaison avec expérience jet-sillage
σ_ϵ	= 1,3	comparaison avec expérience jet-sillage

Ce modèle a été présenté au début des années 1970 par W.P. Jones et B.E. Launder [16], puis les constantes ont été déterminées par B.E. Launder et D. Spalding [25]. Un des avantages de cette méthode est la prise en compte de la variabilité spatiale de l'agitation turbulente, et sa simplicité de mise en œuvre. Il s'avère être un des modèles les plus répandus dans les applications pratiques à l'usage de l'ingénieur (écoulements dans des conduites par exemple). Utilisé en dehors d'écoulements cisailés simples pour lesquels il fut initialement conçu, il conduit à des résultats qui, sans être toujours quantitativement corrects, restent le plus souvent qualitativement représentatifs.

Rappelons que le modèle ke présenté plus haut, que l'on appelle aussi modèle ke *standard*, n'est utilisable que dans les écoulements fortement turbulents, ce qui n'est plus avéré dans des régions proches des parois. L'utilisation de lois de paroi est alors une solution pour tenir compte de la présence des effets visqueux (Cf. paragraphe 3.4). Une alternative à l'utilisation de ces lois de paroi a été mise en place par la modification des équations de transport de k et ϵ en intégrant un facteur d'amortissement pour tenir compte des effets de paroi [24]. Dans ce cas, la viscosité turbulente s'écrit :

$$\mu_T = \rho C_\mu f_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\epsilon}} \quad (3.16)$$

où

$$f_\mu = 1 - e^{-0,0115y^+}$$

Ainsi lorsque l'on considère des régions de plus en plus proches de la paroi, ce coefficient tend vers zéro, et les effets de la turbulence diminuent.

Le modèle ke est d'autre part basé sur une dépendance locale et surtout linéaire des tensions turbulentes vis à vis du champ moyen (Eq. 3.4). De ce fait, le modèle a tendance à surestimer les contraintes turbulentes (en leur donnant un aspect diffusif qu'elles n'ont généralement pas) et la viscosité turbulente dans les zones de fort cisaillement (couche limite, couche de mélange). D'autre part, cette linéarité fait que ce

9. Ces deux nombres caractérisent la corrélation pression-vitesse, et restent très difficiles à modéliser.

modèle a quasiment aucune chance de bien reproduire des écoulements complexes, en particulier tridimensionnels. Pour pallier ce problème il existe des lois de comportements non-linéaires basées généralement sur l'ajout dans la relation (3.4) des tenseurs d'ordres supérieurs issus de combinaisons des tenseurs des taux de déformation et rotation moyens (par exemple Pope [36]).

Le modèle $k - \epsilon$ standard est connu d'autre part pour surestimer la production d'énergie cinétique turbulente dans les régions proches d'un point d'arrêt. Ce phénomène est appelé *anomalie du point d'arrêt* et a pour conséquence un retardement du décollement de la couche limite, l'écoulement ayant par cette erreur plus d'énergie pour vaincre le gradient de pression adverse. Ceci a évidemment des conséquences importantes sur la prédiction numérique des efforts de traînée sur un obstacle ou sur la prédiction des échanges thermiques dans cette région (Marchesse et Changenet [29]). Certains auteurs tentent de contourner ce problème : Durbin [9] en proposant une formulation d'estimation de la production caractérisée par une limite supérieure ou Shih [46] permettant au coefficient C_μ d'être variable (*modèle $k - \epsilon$ réalisable* proposé par le code commercial FLUENT).

Modèle de fermeture $k\epsilon$ RNG

Le modèle de turbulence RNG $k\epsilon$ proposé entre autres parmi Yakhot et Orszag [54] est obtenue à partir de l'équation instantanée de Navier-Stokes en utilisant une technique mathématique appelée "groupe de renormalisation" (RNG)¹⁰. Il s'agit donc d'un modèle standard amélioré. Le modèle fait apparaître des constantes différentes de celles du modèle standard $k\epsilon$ et obtenues de façon théorique cette fois :

$$C_\mu=0,0845; \sigma_k=\sigma_\epsilon=0,7179; C_{1\epsilon}=1,42; C_{2\epsilon}=1,68.$$

Ce modèle tel quel conduit à des prédictions numériques insatisfaisantes et a donc été modifié par un changement des coefficients et par l'introduction de terme dans l'équation de transport de ϵ (Yakhot *et al.* [55]).

Le principe de ce modèle est de quantifier les effets des structures turbulentes de petite échelle. Cette approche s'appuie sur l'hypothèse d'universalité des petites échelles¹¹, plus connue sous le nom d'hypothèse de Kolmogorov (1941) [20]. Les grosses structures sont conservées mais à la différence de la LES qui résoud de façon déterministe les équations de Reynolds pour ces échelles, le modèle RNG $k\epsilon$ introduit deux équations de transport pour k et ϵ similaires au modèle standard.

Ce modèle a pour intérêt majeur d'aboutir sur des résultats plus réalistes dans des régions de fort gradient en ne produisant pas de diffusivité excessive qui faisait défaut au modèle $k\epsilon$ standard. Ceci est très important dans les cas où l'écoulement subit des

10. Cette approche mathématique est utilisée dans différentes branches de la physique pour modéliser des phénomènes dynamiques complexes.

11. Ici on fait l'hypothèse que quelle que soit la configuration de l'écoulement, les petites structures se comportent de façon identique. Il n'en est pas de même pour les plus grandes structures qui elles voient leur dimension limitée par la géométrie qui les entoure. Leur comportement s'en trouve dès lors très influencé, on perd ainsi la notion d'universalité. Remarquons d'autre part que cette hypothèse a déjà été utilisée dans le cadre de la LES (paragraphe 3.1.2 page 38) permettant la création d'un filtre spatiale.

accélération ou des décélérations importantes (conduite en présence d'un convergent ou d'un divergent) ou lorsqu'il existe des décollements ou des zones de recirculation. D'autre part l'anomalie du point d'arrêt semble être écarté par ce modèle. Il apparaît néanmoins que ceci doit du à l'augmentation de la dissipation contrecarrant alors la surestimation de la production d'énergie cinétique turbulente (Laurence [26]).

Modèle de fermeture $k\omega$

Ce modèle a été proposé par Wilcox en 1988 [52] et repose sur l'utilisation d'une échelle caractéristique des gros tourbillons, $\omega = \epsilon/k$, et sur la même linéarité entre la viscosité turbulente et le cisaillement du champ moyen. La viscosité turbulente est donnée dans ce cas par la relation suivante :

$$\mu_T = \alpha \frac{\rho k}{\omega} \quad (3.17)$$

où α est un coefficient permettant de diminuer l'influence de la viscosité turbulente en effectuant une correction "bas-Reynolds". Les équations de transport pour k et ω sont respectivement :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k - Y_k \quad (3.18)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \omega u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + G_\omega - Y_\omega \quad (3.19)$$

Dans ces deux équations de transport, G représente la génération d'énergie cinétique turbulente ou de la dissipation effective, selon l'indice utilisé, due au gradient de vitesse moyenne. Γ_k et Γ_ω représentent la diffusivité effective de k et ω , respectivement. Y_k et Y_ω représentent la dissipation de k et ω par la turbulence.

L'intérêt principal de ce modèle est qu'il est intégrable jusqu'à la paroi. Il donne de meilleurs résultats que le modèle $k\epsilon$ pour des écoulements caractérisés par des gradients de pression adverses en estimant mieux la position des décollements. D'autre part, l'équation de transport est indépendante de celle de k ce qui rend ce modèle intéressant numériquement. Par contre, ce modèle est très sensible aux valeurs de ω dans les régions externes à la couche limite (Menter [32]), ce niveau étant d'autre part fixé généralement de façon arbitraire par l'utilisateur à l'entrée du domaine. Tel quel, ce modèle ne peut pas être utilisé pour des écoulements externes. L'efficacité de ce modèle pour résoudre l'écoulement dans la région proche de la paroi a soulevé l'idée d'un mélange de deux modèles de turbulence, le modèle $k\omega$ pour résoudre la région affectée par les effets visqueux, et le modèle $k\epsilon$ pour résoudre l'écoulement dans des régions éloignées des parois. On parle alors de *modèles hybrides*, tel que le modèle SST $k\omega$.

Modèle de fermeture SST $k\omega$

Afin d'utiliser les avantages du modèle $k - \epsilon$ pour l'écoulement principal et ceux du modèle $k - \omega$ pour les régions de paroi, Menter [33] propose en 1994 un modèle hybride appelé BSL (pour *Baseline*) $k - \omega$. L'approche $k\omega$ de Wilcox [52] est utilisée pour prédire l'écoulement dans la région affectée par la viscosité, et possède l'avantage de ne pas nécessiter de fonction d'amortissement, alors que l'approche $k - \epsilon$ est utilisée pour l'autre partie de l'écoulement.

D'après les relations (3.16) et (3.17), on peut écrire

$$\epsilon = C_\mu \omega k$$

que l'on peut insérer dans l'équation de transport du taux de dissipation du modèle $k - \epsilon$ (Eq. 3.15). On obtient, après quelques manipulations :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\omega) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\omega u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + G_\omega - Y_\omega + 2 \frac{\rho\sigma\omega^2}{\omega} \nabla k : \nabla \omega \quad (3.20)$$

On note que l'équation de transport de la quantité ω du modèle $k - \omega$ (Eq. 3.19) et celle obtenue à l'instant à partir du modèle $k - \epsilon$ (Eq. 3.20) sont identiques à l'exception du dernier terme :

$$2 \frac{\rho\sigma\omega^2}{\omega} \nabla k : \nabla \omega \quad (3.21)$$

Puisque l'idée est d'utiliser le modèle $k - \epsilon$ dans les régions éloignées des parois et le modèle $k - \omega$ dans la région de paroi, on modifie l'équation (3.20) en introduisant une fonction F_1 telle que :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\omega) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\omega u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + G_\omega - Y_\omega + 2(1 - F_1) \frac{\rho\sigma\omega^2}{\omega} \nabla k : \nabla \omega \quad (3.22)$$

Ainsi, cette fonction F_1 , dont la valeur numérique dépend de la distance à la paroi, permet d'assurer la transition d'un modèle à l'autre. Lorsque $F_1 = 0$, le modèle $k - \epsilon$ est utilisé, lorsque $F_1 = 1$ le modèle $k - \omega$ est utilisé, et pour des valeurs numériques comprises entre ces deux valeurs, un mélange des deux modèles est employé. En conséquence il devient inutile maintenant d'employer une fonction d'amortissement pour tenir compte de l'influence de la paroi. Le passage des valeurs pour F_1 de 0 à 1 est assuré par une fonction de type tangentielle, $F_1 = \tanh(\arg_1^4)$ avec \arg_1 fonction de la distance de la cellule avec la paroi (majoritairement).

D'autre part, on note que le modèle BSL $k - \omega$ est néanmoins insatisfaisant à prédire correctement les décollements de couche limite consécutivement à une surestimation de la viscosité turbulente. Ce point est amélioré par Menter [33] en ajoutant une formulation permettant de limiter la valeur de la viscosité turbulente. Ce nouveau modèle est appelé SST $k - \omega$ pour *Shear Stress transport*. Les équations de transport du modèle SST $k - \omega$ sont similaires aux équations (3.18) et (3.19) utilisées par le modèle $k - \omega$ standard.

3.2.4 Équation finale

Rappelons que la résolution de toutes les équations énoncées dans les paragraphes précédents ont pour but d'estimer la viscosité turbulente (Eq. 3.4) nécessaire dans l'obtention du champ moyen. Cette estimation introduite dans les équations de Reynolds permet d'écrire :

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = \bar{f}_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_e \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right] \right) \quad (3.23)$$

avec $\mu_e = \mu + \mu_T$ la viscosité effective. Cette dernière est élevée dans les régions comportant de forts gradients de vitesse introduisant une production d'énergie turbulente. L'écoulement moyen est donc régi par cette équation, en plus de l'équation de continuité moyennée (Eq. 3.2).

3.3 Modèle de turbulence du second ordre

Nous l'avons vu plus haut la relation utilisant le concept de la viscosité turbulente est basée sur des hypothèses fragiles (page 45). De ce fait, les modèles présentés dans les paragraphes précédents paraissent inadaptés à des écoulements complexes. Laissant ce concept de viscosité turbulente, le modèle RSM (pour *Reynolds Stress Model*) [23, 13, 22] propose de résoudre l'équation de transport du tenseur de Reynolds accompagnée d'une autre équation de transport (pour le taux de dissipation ϵ , ou la dissipation spécifique ω) permettant, elle, d'estimer la longueur caractéristique de turbulence. Ainsi, la modélisation au second ordre résout les équations du tenseur de Reynolds, alors que les modèles du premier ordre les modélisent. Les modèles du second ordre contiennent donc plus de physique.

Il est possible d'obtenir l'équation de transport du tenseur de Reynolds en prenant la moyenne de la quantité ci-dessous :

$$\overline{u'_i \mathcal{N}(u_j) + u'_j \mathcal{N}(u_i)}$$

où $\mathcal{N}(u_j)$ correspond à l'opérateur "équation instantanée de Navier-Stokes", i.e.,

$$\mathcal{N}(v_j) = \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \rho f_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

L'équation de transport du tenseur de Reynolds peut s'écrire schématiquement :

$$\frac{D}{Dt} (\rho \overline{u'_i u'_j}) + \frac{\partial T_{ijk}}{\partial x_k} = P_{ij} + \Pi_{ij} - \epsilon_{ij}$$

où T_{ijk} est un terme en corrélation triple, P_{ij} est terme de production d'énergie cinétique turbulente, Π_{ij} un terme de transport par la pression, et ϵ_{ij} le tenseur de dissipation (et non pas le taux de dissipation donné par la relation 3.13) :

$$\epsilon_{ij} = 2\mu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}$$

Le terme T_{ijk} s'écrit

$$T_{ijk} = \rho \overline{u'_i u'_j u'_k} + p \left(\delta_{kj} u'_i + \delta_{ik} u'_j \right) - \mu \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_j})$$

et fait apparaître un tenseur d'ordre 3 inconnu et nécessitant alors une modélisation. Darly et Harlow [8] proposent par exemple la modélisation suivante :

$$\overline{u'_i u'_j u'_k} = -C_s \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l}$$

Une modélisation est aussi nécessaire pour les termes Π_{ij} et ϵ_{ij} . Le terme de production, quant à lui, ne nécessite aucune modélisation, ce qui est l'intérêt du modèle RSM, car il ne fait intervenir que des moments d'ordre inférieur ou égal à deux :

$$P_{ij} = -\rho \left(\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right)$$

Le modèle RSM est un modèle dît *Haut Reynolds* et nécessite alors l'utilisation d'une loi de paroi pour traiter la région affectée par les effets visqueux.

3.4 Influence de la paroi

Les modèles de turbulence basés sur l'hypothèse d'une forte turbulence ne sont pas valables dans la région proche des parois. Il existe alors plusieurs solutions pour tenir compte de la présence des effets visqueux : (1) ne pas résoudre cette région et utiliser à la place une loi de paroi, (2) introduire des fonctions d'amortissement forçant le comportement du modèle, appelé dès lors modèle bas-Reynolds, ou (3) résoudre des équations différentes pour l'écoulement principal et l'écoulement proche des parois. Les modèles $k\epsilon$ standard ou RNG sont basés sur l'approche (1), le modèle de Spallart et Allmaras sur l'approche (2), et le modèle SST $k\omega$ sur l'approche (3).

Ainsi dans la première approche, la région interne n'est pas résolue et une loi de paroi est alors utilisée pour relier la région affectée par les effets visqueux à la partie de la couche limite pleinement turbulente (Fig. 3.10.a). Cette loi plus ou moins évoluée permet d'estimer les vitesses moyennes ainsi que les quantités turbulentes dans la partie non-résolue mais repose néanmoins sur des hypothèses très contraignantes. Il existe différents niveaux de lois de paroi plus ou moins évoluées, la plus simple étant la *loi de paroi standard* (relation 1.4) aperçue au paragraphe 1.4 valable dans la région caractérisée par $y^+ = 30$. L'inconvénient de cette loi provient du fait qu'elle repose, entre autre, sur un nombre de Reynolds de l'écoulement très important, l'absence d'un gradient de pression adverse. Pour satisfaire ces points, d'autres lois plus élaborées sont alors disponibles et construites la plupart du temps sur une décomposition en deux couches de la couche limite (loi bi-couche). En fonction du point de calcul placé dans la couche limite, la loi de paroi affectera des valeurs adéquates. Ainsi l'utilisation de ce type de loi permet de retrouver des informations dans la sous-couche visqueuse. La valeur du critère de maillage doit donc satisfaire $y^+ \approx 1$. On note donc

que l'approche des lois de paroi peut être moins consommatrice en temps de calculs et en espace de stockage en fonction du degré de complexité de la loi, la taille du premier élément étant plus importante.

Les approches (2) et (3) nécessitent quant à elles dans tous les cas des tailles de mailles beaucoup plus petites, assez petites pour chercher des informations dans la sous-couche visqueuse (Fig. 3.10.b). Le nombre d'éléments de calcul devient alors plus élevé que celui d'un calcul basé sur des modèles haut-Reynolds utilisant des lois de paroi standards.

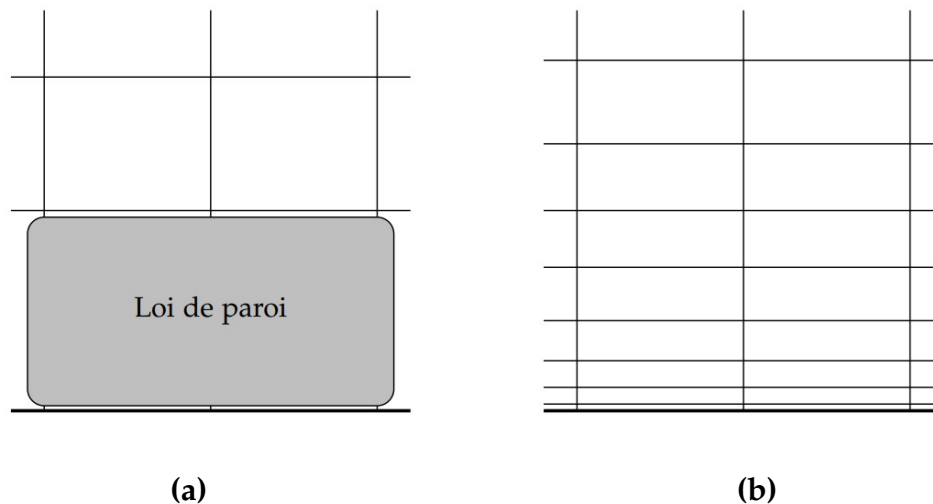


FIGURE 3.10 : Traitement numérique de la région proche d'une paroi. a, approche des lois de paroi; b, approche des modèles bas-Reynolds.

Un cas test classique pour tester les capacités des lois de paroi est la couche limite au-dessus d'une plaque plane (Fig. 3.11). On considère dans cet exemple un domaine d'une longueur égale à 1 m avec les nœuds de la ligne inférieure placés sur la paroi. La vitesse de l'écoulement extérieur à la couche limite est égale à 50 m/s. Le maillage est construit à partir de cette valeur ainsi que celle du y^+ qui doit être en adéquation avec l'approche numérique utilisée dans la région de paroi. On observe qu'un calcul effectué à l'aide d'un modèle bas-Reynolds nécessite deux fois plus de volumes qu'un calcul basé sur des modèles haut-Reynolds utilisant une loi de paroi standard.

3.5 Choisir le modèle de turbulence

Aucun modèle de turbulence n'est universellement reconnu supérieur aux autres pour toutes les classes de problème. Le choix du modèle de turbulence va dépendre de considérations telles que la complexité de l'écoulement abordé, le niveau de précision requis, le temps de calcul et la place mémoire disponibles. Pour effectuer le meilleur choix, il est important de connaître les limites de chacun des modèles de turbulence des codes CFD. Quand cela est possible, une comparaison de résultats numériques obtenus à partir de différents modèles avec des résultats expérimentaux reste une aide dans le choix du modèle le plus approprié.

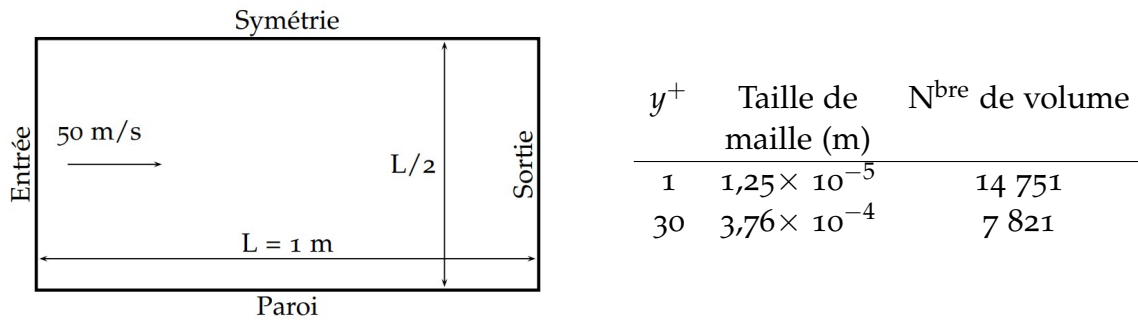


FIGURE 3.11 : Domaine de calculs d'une couche limite au-dessus d'une plaque plane. Le tableau rassemble les valeurs de la taille des premiers éléments proches de la paroi estimés à partir de la valeur du critère y^+ . Les deux maillages utilisent 100 éléments le long de la paroi, et une évolution des tailles d'éléments dans la direction transversale égale à 5%.

3.6 Modélisation instationnaire - méthode URANS

Dans certaines études industrielles, il est très important de connaître l'évolution temporelle du champ instantané. Seules les méthodes déterministe et semi-déterministe sont adaptées à l'obtention de cette information, alors que la méthode statistique par essence ne l'est pas. En effet, le champ résolu correspond à la moyenne temporelle par ergodicité et ne contient donc aucune information temporelle. Aucune information instationnaire n'est donc *a priori* disponible.

Malgré cela, certaines méthodes ont été mises en place depuis les années 1990 et sont basées sur la modification du modèle RANS sur des bases plus ou moins empiriques afin de résoudre les instationnarités à grande échelle. Parmi l'ensemble des méthodes disponibles, la méthode URANS (pour Unsteady Reynolds Average Navier-Stokes) s'est répandue avec succès dans le monde industriel. Cette méthode consiste à résoudre les équations RANS vues plus haut avec une résolution du terme instationnaire (i.e. $\partial/\partial t$) sans modification des constantes impliquées dans les modèles. Ce terme doit tendre vers zéro dans le cas d'un écoulement statistiquement stationnaire ce qui n'est pas toujours le cas. Cela signifie que les processus simulés présentent des moyennes statistiques instationnaires comme cela est le cas par exemple pour un écoulement au passage d'un cylindre. Les simulations URANS montrent ainsi ses capacités à capturer des structures cohérentes à grande échelle avec une bonne estimation du nombre de Strouhal¹². En ce sens Carpy et Manceau [6] remarquent que d'une manière générale les résultats obtenus par moyenne temporelle de simulations URANS sont en meilleur accord avec l'expérience que ceux issus de l'approche RANS (en permanent). Ceci est le cas par exemple d'un écoulement au passage d'un cube posé sur le sol. Une résolution en permanent entraîne une surestimation de la région de recirculation dans le sillage de l'obstacle (Fig. 3.12.c) et donc une sous-estimation du coefficient de traînée. La moyenne temporelle du champ aérodynamique instationnaire présente quant à elle une taille de la région de recirculation plus proche de celle mesurée (respectivement Figs. 3.12.d et 3.12.a).

12. Ce nombre sans dimension caractérise les effets instationnaires.

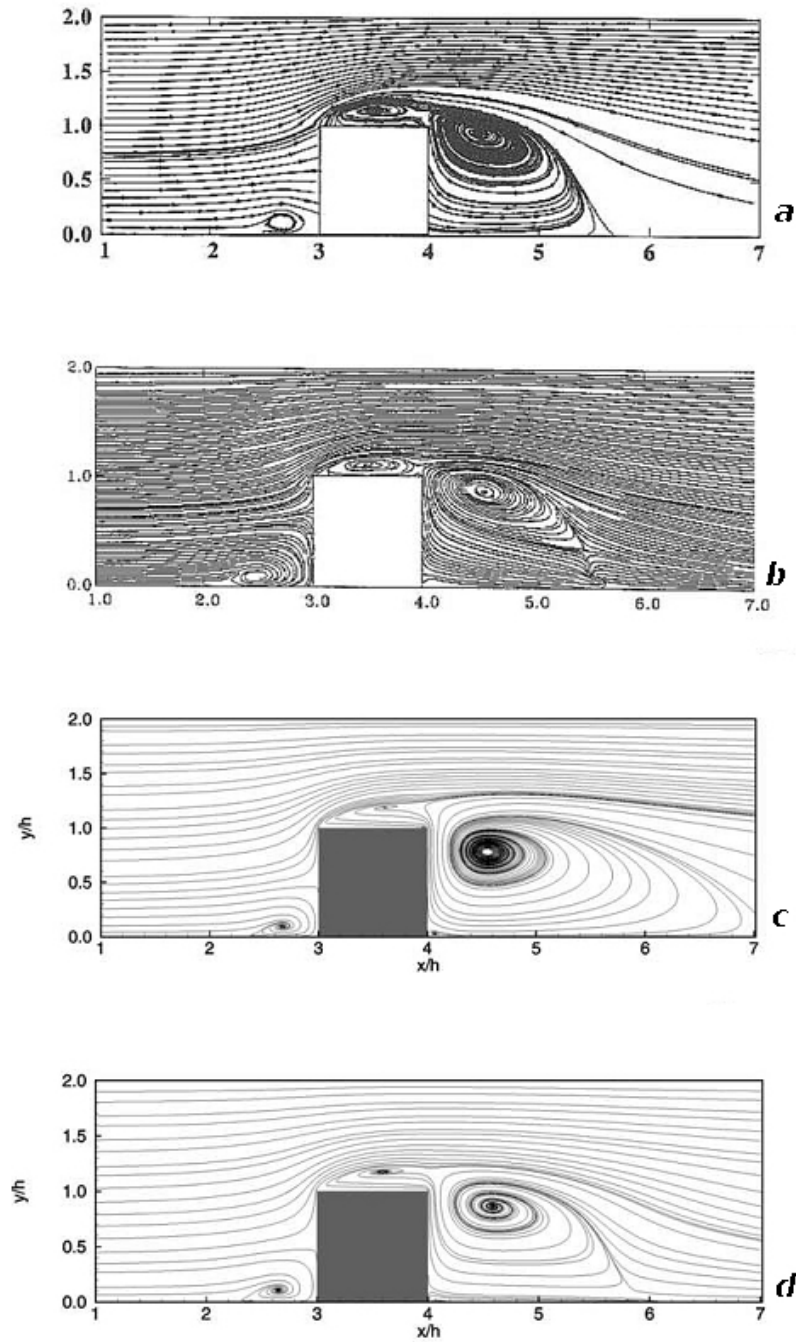


FIGURE 3.12 : Lignes de courant dans le plan de symétrie dans le cas d'un écoulement au passage d'un cube ($Re_h = 40\,000$ - a, données expérimentales d'après Martinuzzi *et al.* [31]; b, LES d'après Shah [45]; c, RANS permanent d'après Iaccarino *et al.* [15]; d, RANS transitoire d'après Iaccarino *et al.* [15]).

3.7 Et l'industrie dans tout ça ?

D'après ce que nous venons de voir, il existe trois principales méthodes d'approximation des effets de la turbulence : la DNS, la LES, et l'approche statistique. Notons que les deux premières nous permettent de toucher au plus près la turbulence, alors qu'un travail statistique au contraire nous éloigne de cette physique pour nous entraîner vers des formulations de fermetures que l'on peut difficilement valider.

Cependant, n'oublions pas qu'à l'ère des ordinateurs de faible puissance¹³, les méthodes statistiques étaient l'unique approche pour le "petit industriel" ne disposant pas, à la fois de supercalculateurs réservés aux universitaires ou aux grands groupes, mais aussi des compétences adéquates.

Aujourd'hui, le développement très important de la puissance des calculateurs met en avant la méthode LES, qui est largement proposée dans la plupart des codes commerciaux (Fluent, Star CCM+, CFX) ou gratuits (Openfoam). Il est donc fort à parier que la simulation¹⁴ sera le nouvel outil numérique industriel. Cependant, son utilisation requière des connaissances sur ces méthodes et une expérience certaine.

Pour ces raisons, de nos jours le calcul statistique demeure la méthode la plus utilisée, permettant d'autre part d'avoir des résultats corrects pour des temps de calcul satisfaisants.

3.8 Résolution numérique à partir d'un code de calculs

La modélisation de la turbulence n'est évidemment pas une fin en soi, elle est la base de méthodes numériques proposant des solutions aux équations différentielles vues plus haut. Celles-ci sont obtenues à partir de codes de calculs, commerciaux ou développés par des laboratoires de recherche universitaires et industriels.

Le succès de ces codes est étroitement lié au développement des capacités d'exécution et de stockage des ordinateurs, le rapport performance/coût ayant incroyablement augmenté dès les années 1950. À cette date, les machines effectuaient quelques centaines d'opérations à la seconde alors que de nos jours les plus rapides opèrent 10^{12} opérations pendant cette même seconde. De même, ces premières machines, très onéreuses et occupant une pièce entière, demandaient une maintenance permanente. Aujourd'hui un ordinateur de bureau possède les mêmes capacités sinon plus.

On peut alors comprendre aisément l'intérêt grandissant des industriels d'utiliser ces codes de calculs. Cette demande est tellement importante qu'elle occupe un tiers des chercheurs en mécanique des fluides, ce nombre grandissant encore. Ce champ de recherche est appelé CFD (pour Computational Fluid Dynamics).

Il est important de comprendre que la CFD ne donne qu'une approximation de la solution recherchée. La différence entre le calcul et la réalité provient d'erreurs accumulées par le code, et provenant d'origines multiples : (1) les équations différentielles générales sont souvent simplifiées en ne gardant que les termes prépondérants ; (2)

13. Ce n'est pas si vieux que ça...

14. Comparativement à la modélisation.

une approximation est effectuée lors de l'étape de discrétisation ; (3) la résolution est atteinte par des méthodes itératives et à moins de ne faire calculer très longtemps le code, les solutions exactes des équations discrétisées ne sont jamais obtenues.

Les composants importants d'un code de calculs en mécanique des fluides numérique sont les suivants :

1. **Le modèle mathématique** : le départ de toute résolution numérique est le modèle mathématique, c'est à dire l'ensemble des équations différentielles et des conditions aux limites. Ces premières changent selon le type d'écoulement traité (incompressible ou compressible, turbulent, bi- ou tridimensionnel, etc.). Comme il est mentionné plus haut, ce modèle peut inclure des simplifications des lois de conservation. En effet, il est illusoire de mettre en place un modèle universel et performant. Les équations de bilan écrites plus haut (Eqs. 2.6 et 2.14) peuvent être écrites sous une forme généralisée (si on ne tient pas compte du terme lié au temps) :

$$\frac{\partial(\rho u_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + q_\phi$$

où le terme du membre de gauche est un terme convectif, alors que le premier terme du membre de droite est un terme diffusif. Dans le cas de l'équation de conservation de la masse $\phi = 1$, et pour le bilan de quantité de mouvement $\phi = u_i$. On supposera les quantités ρ , u_j , Γ , et q_ϕ connues. Ceci n'est évidemment pas le cas car la vitesse à cette étape n'est pas encore calculée, et les propriétés du fluide peuvent changer avec la température, et si comme nous l'avons vu des modèles de turbulence sont employés, du champ de vitesse aussi. La résolution par méthode itérative considère ϕ comme la seule inconnue, les autres étant fixées et calculés dans l'itération précédente.

2. **La méthode de discrétisation** : Il s'agit de méthodes d'approximation des équations différentielles régissant le mouvement du fluide par un système d'équations algébriques. Il existe plusieurs approches, mais les plus utilisées sont les différences finies, les volumes finis, et les éléments finis. Toutes ces méthodes aboutissent à des solutions identiques si le maillage est assez fin. Néanmoins, certaines méthodes sont plus adaptées à certains écoulements.
3. **Le maillage** : les localisations des points sur lesquels sont résolues les équations algébriques sont définies par le maillage. Selon l'agencement des éléments, il peut être structuré, structuré par bloc, non-structuré, chacune de ces configurations ayant ses avantages et ses inconvénients.
4. **L'approximation sur les éléments** : il faut à partir des éléments mis en place, définir les approximations à utiliser. Les solutions sont obtenues sur des nœuds, l'approximation permet d'atteindre des valeurs sur l'élément.
5. **La méthode de résolution** : la discrétisation aboutit à un système d'équations algébriques (mis sous forme de matrice généralement). Il existe des méthodes directes d'inversions et d'autres par itérations.
6. **Les critères de convergence** : les méthodes de résolution itératives demandent un critère d'arrêt. Celui-ci est fixé par l'utilisateur.

APPLICATION DE LA MODÉLISATION DE LA TURBULENCE À LA CFD

La mécanique des fluides numérique, plus connue sous l'acronyme CFD pour *Computational Fluid Dynamics*, est l'analyse d'un système impliquant un écoulement de fluide, des échanges thermiques, et des phénomènes associés, à partir d'une simulation aidée par ordinateur. Cette technique est très puissante et permet d'étudier des variétés d'écoulements du monde industriel ou non très vastes. Ces applications peuvent traiter les efforts exercés par un écoulement sur un obstacle (i.e. portance et traînée), les écoulements dans les turbomachines, la combustion dans les moteurs, le refroidissement de composants électroniques, les transports de polluants par l'air, la météorologie, l'ingénierie médicale, etc. L'outil CFD est devenu presque impératif lors de la conception d'un produit. L'industrie aéronautique a intégré depuis les années 1960 cet outil dans le dessin, la R&D, et la fabrication des avions et des moteurs. Certes le coût de l'utilisation de la CFD lié aux licences, au matériel informatique, et aux personnes ayant les compétences peut être important. La CFD a cependant plusieurs avantages tels que la possibilité d'estimer des champs aérodynamiques dans des régions inaccessibles expérimentalement, des temps de réalisation intéressants comparativement au temps nécessaire pour réaliser des modèles réduits pour soufflerie. Ainsi les études paramétriques numériques deviennent peu coûteuses et permettent d'atteindre une quantité très importante d'informations concernant les écoulements.

Notons que même si les codes de calcul deviennent de plus en plus évolués, il demeure important de valider régulièrement les résultats numériques par comparai-

son avec des données expérimentales. De même, le succès d'un calcul CFD repose généralement sur l'expérience de l'utilisateur et de ses connaissances scientifiques.

4.1 Les codes de calcul en CFD

Les calculs numériques en CFD sont possibles à partir de codes du commerce ou de codes développés par des départements de recherche. Concernant les premiers, les plus connus sont ANSYS-CFX, Fluent, et Star-CD¹. Ces trois codes sont basés sur la méthode des volumes finis et ont des architectures similaires (Cf. paragraphe 4.2). Les modèles de turbulence qui y sont proposés correspondent à ceux proposés dans la littérature avec parfois des modifications. Plusieurs études dont celle issue de *l'American Society of Mechanical Engineers* [11] ont eu pour but de confronter les résultats obtenus à partir de ces codes de CFD à partir de configurations identiques. Les résultats obtenus sont différents principalement à cause de conditions limites, de maillage, et de schémas numériques tous différents. Un exemple est proposé sur la figure 4.1 concernant la prédiction d'un écoulement au passage d'un diffuseur asymétrique. On note d'une part que les profils d'énergie cinétique turbulente atteints par les trois codes de calculs cités plus haut sont différents les uns des autres. D'autre part, l'asymétrie du profil de ce même paramètre dans la région aval au diffuseur n'est pas prédite par les calculs numériques.

4.2 Structure d'un code CFD

Les codes CFD sont articulés autour d'algorithmes de résolution des problèmes d'écoulements. Ils accueillent généralement des interfaces pratiques et sophistiquées pour le choix des paramètres de résolution ou de post-traitement. Ainsi les codes contiennent trois éléments importants : (1) un pré-processeur, (2) un solveur, et (3) un post-processeur.

4.2.1 Le pré-processeur

Le rôle du pré-processeur est d'accueillir les données d'entrée du problème à résoudre et à les transformer de façon utile au solveur. Ces données comprennent le domaine de calcul maillé, les phénomènes physiques à modéliser (turbulence, combustion, multiphasique, etc.), les propriétés physiques du fluide, et les conditions limites adaptées au problème.

La solution du problème (i.e. vitesse, pression, température) est définie aux nœuds de chaque cellule. La précision de cette solution, mais aussi le temps de calcul, dépendent grandement du nombre de nœuds. Un maillage optimisé est généralement un maillage non-uniforme. Ainsi la taille des mailles devra être petite dans des régions affectées par des évolutions importantes de la solution (i.e. le sillage d'un obstacle, la

1. Informations sur ces produits aux adresses suivantes www.ansys.com, www.fluent.com, et www.cd-adapco.com

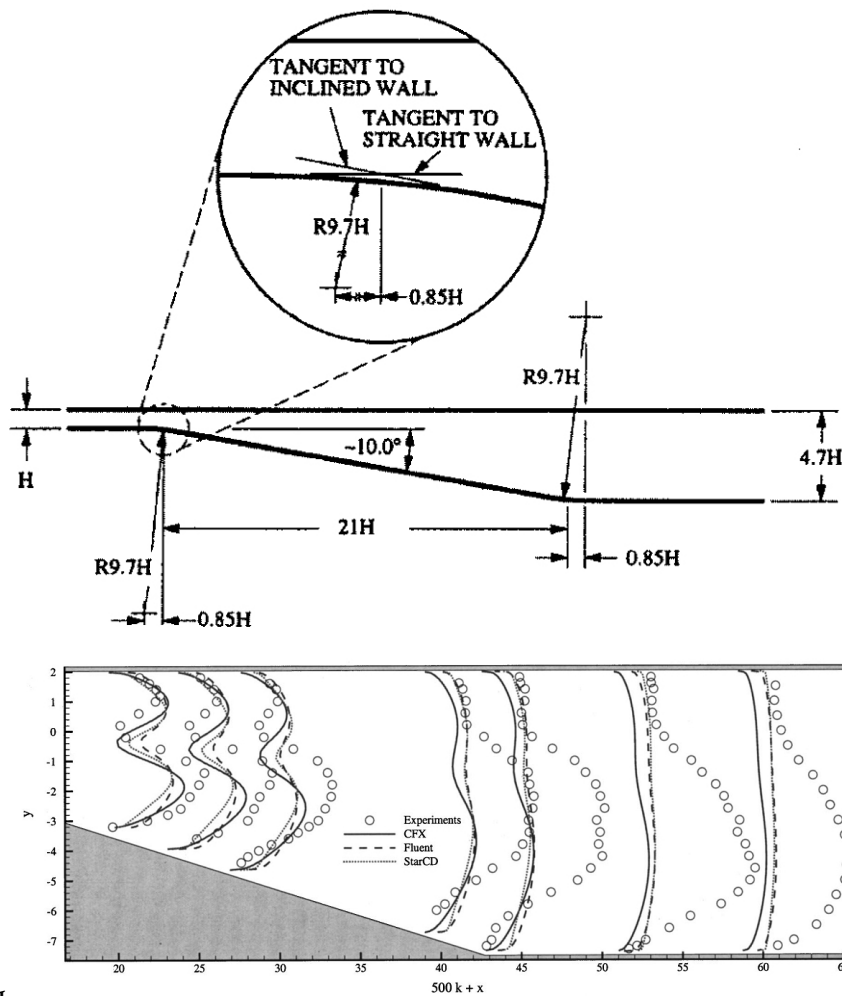


FIGURE 4.1 : Géométrie du diffuseur asymétrique (haut) et prédiction des profils d'énergie cinétique turbulente à partir du modèle de turbulence Low-Reynolds $k - \epsilon$ utilisé par trois codes de calculs (d'après Iaccarino [14]).

11

région proche d'une paroi, etc.) alors que cette taille pourra être beaucoup plus importante dans les régions caractérisées par des faibles variations.

L'utilisateur des codes CFD passe plus de 50% de son temps à dessiner le domaine de calcul et à le mailler. En conséquence, les codes proposent maintenant des outils propres de conception ou facilitent l'importation de dessins issus d'outils de CAO. D'autre part, les outils de maillage permettent de tenir compte très tôt dans le projet de particularités de maillage liées aux phénomènes à traiter par la suite.

4.2.2 Le solveur

Les algorithmes du solveur ont pour but (1) d'intégrer les équations de bilan sur les volumes de contrôle, (2) de discrétiser les formulations intégrales en un système algébrique d'équations, et (3) d'estimer la solution de ces équations à partir de méthodes itératives. Il existe principalement trois méthodes de discrétisation : (i) les différences finis, (ii) les volumes finis, et (iii) les éléments finis. Les codes de CFD sont généralement basés sur la méthode des volumes finis car effectuer des bilans d'équations de bilan elles-mêmes sur chaque volume rend très attractive cette méthode et explique le succès de cette approche auprès des fournisseurs de code CFD.

La conservation d'une quantité à travers un volume de contrôle peut être exprimée

par l'équilibre des processus tendant augmenter ou diminuer cette quantité :

$$\left[\begin{array}{l} \text{Taux de} \\ \text{variation de la} \\ \text{quantité } \psi \\ \text{au cours du temps} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{Augmentation} \\ \text{de } \psi \text{ due à} \\ \text{la convection à} \\ \text{travers le volume} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{Augmentation} \\ \text{de } \psi \text{ due à} \\ \text{la diffusion à} \\ \text{travers le volume} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{Création de} \\ \psi \text{ à} \\ \text{l'intérieur} \\ \text{du domaine} \end{array} \right]$$

Les codes de CFD disposent de techniques adaptées pour le traitement des phénomènes de transport liés à la convection (transport consécutif à l'écoulement), à la diffusion (transport du aux variations point-à-point d'une quantité ψ), et la variation dans le temps de cette quantité.

4.2.3 Le post-processeur

Les post-processeurs ont les capacités d'afficher le domaine de calcul et son maillage, les vecteurs-vitesse, des contours, des suivis de particules, des animations, et d'effectuer des opérations sur l'ensemble des solutions atteintes par le solveur. L'utilisateur a la possibilité d'autre part d'exporter ses résultats dans des formats standards pour une utilisation extérieure.

4.3 Le maillage

4.3.1 Différents types de maillage

Le maillage est une représentation discrète du domaine réel accueillant le fluide en mouvement. Il existe différents types de maillage, structurés ou non. Les maillages structurés proposent des mailles alignées les unes aux autres sans que les lignes ne se croisent (Fig. 4.2.a). Ce type de maillage est particulièrement adapté aux formes simples de géométrie. Il est néanmoins possible de modifier le maillage pour des surfaces courbes (Fig. 4.2.b). Pour les géométries plus complexes, il devient impos-

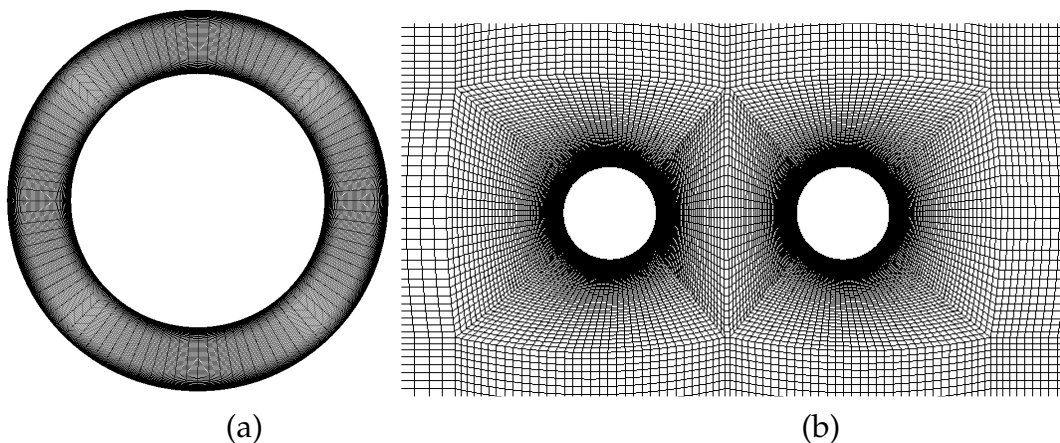


FIGURE 4.2 : a, maillage structuré de type H; b, maillage structuré de type O adapté à la courbure de la surface de l'obstacle (technique O-Grid).

sible de réaliser un maillage structuré. Les maillages non-structurés permettent alors de mailler convenablement le domaine. Dans ce cas les éléments sont des triangles ou des quadrilatères en 2-D (Fig. 4.3), et des tétraèdres et des hexaèdres en 3-D. Des mailles de ce type peuvent être générés à partir d'algorithmes (Delaunay, etc.). Ce type de maillage peut être raffiné simplement localement. Cette simplicité est malheureusement déséquilibrée par la complexité de la manipulation des données liées au maillage. Les matrices du système algébrique des équations deviennent mal-conditionnées, et les solvers adaptés aux maillages irréguliers sont généralement plus lents que ceux écrits pour les maillages structurés.

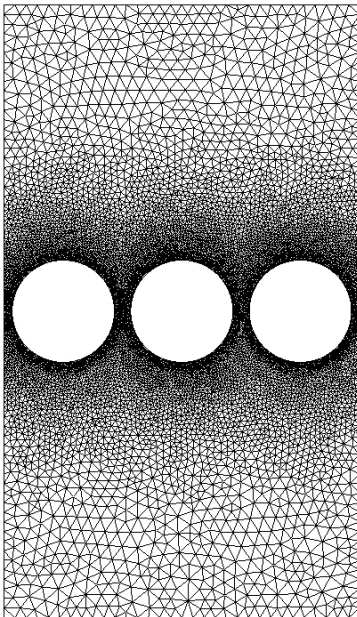


FIGURE 4.3 : Maillage non structuré autour de trois cylindres (d'après Marchesse et al. [30]).

4.3.2 Épaisseur de la première maille

Comme il a été précédemment, il existe plusieurs stratégies pour tenir compte de la modification de la turbulence par la paroi (section 3.4). Il est préférable d'utiliser les modèles haut-Reynolds (tel que le modèle $k\epsilon$ standard par exemple) avec une première placée dans la zone logarithmique, c'est-à-dire des valeurs numériques du produit sans dimension y^+ comprises dans la gamme 30–1000. Si un modèle bas-Reynolds est utilisé cette fois-ci, il faut alors placer la première maille dans la sous-couche visqueuse ($y^+ < 5$).

Il peut être difficile cependant de construire, avant le calcul, un maillage satisfaisant ces critères. On peut tout de même s'aider des formulations vues précédemment dans la section 1.4 observée dans le cas de la couche limite d'une plaque plane. La définition du produit sans dimension, $y^+ = y \times u_f / \nu$, fait intervenir la distance à la paroi y associée à la valeur du produit sans dimension y^+ (qui permet de situer y dans la couche limite). Si on tient compte de la définition d'un volume fini ayant en commun une face avec la paroi (Figure 4.4), on note que la taille de la première maille, y_m , est deux fois plus grande que la distance y . Cette dernière correspond à l'emplacement du calcul numérique du premier volume fini après la paroi. Ainsi, on

peut écrire :

$$y_m = \frac{2y^+ \times \nu}{u_f}$$

avec la vitesse de frottement, u_f , valant approximativement 5% de la vitesse en dehors de la couche limite, U_∞ [3]. On obtient finalement :

$$y_m = \frac{2y^+ \times \nu}{0,05 \times U_\infty} \quad (4.1)$$

On observe donc une épaisseur y_m d'autant plus petite que la vitesse de l'écoulement est élevée. Cette formulation est utile à donner un ordre de grandeur de la taille de la première maille dans la région de paroi. Considérons, par exemple, le calcul numérique d'un écoulement d'air ayant pour vitesse $U_\infty = 10$ m/s à l'aide du modèle bas-Reynolds, SST $k - \omega$ et basé sur y^+ égal à l'unité. La taille de la première maille vaut d'après la relation (4.1) : $y_m = 2 \times 1 \times (1,831 \times 10^{-5} / 1,185) / (0,05 \times 10) = 6,18 \times 10^{-5}$ m, soit 62 μm . Notons, encore une fois, que ces formulations proviennent de l'analyse d'une couche limite de plaque plane. Les écoulements de paroi ne sont pas tous dans ce cas évidemment d'où l'approximation donnée par cette relation. D'autre part il convient à l'utilisateur de vérifier, une fois son calcul terminé, les valeurs numériques du produit sans dimension y^+ afin de voir si elles satisfont les exigences du modèle de turbulence utilisé. Si ces valeurs sont trop élevées, l'utilisateur pourra alors diminuer l'épaisseur de la première couche de maillage.

Étant donné ce qu'il vient d'être dit, le produit sans dimension y^+ est d'une grande importance dans l'adéquation entre le maillage et le modèle de turbulence. On l'appellera alors souvent *critère de maillage* alors qu'il représente essentiellement une localisation dans la couche limite.

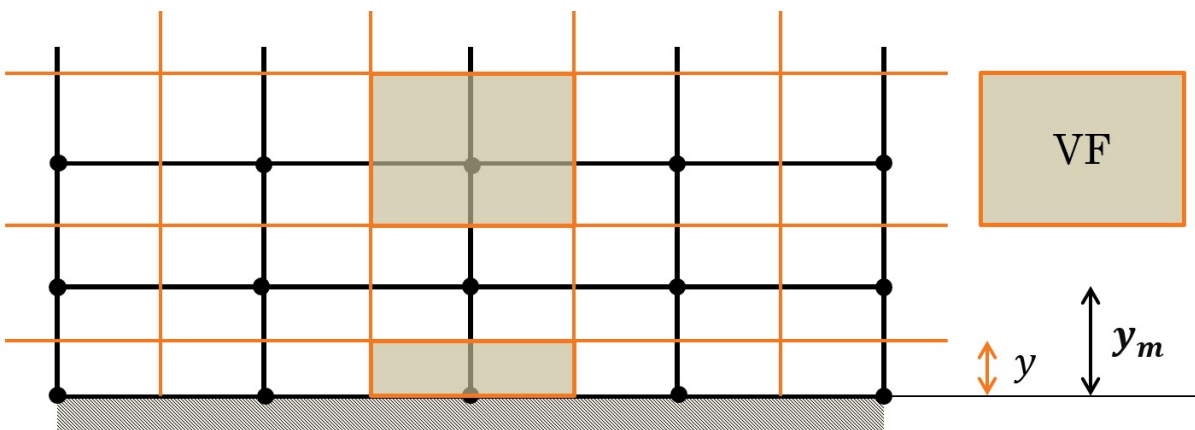


FIGURE 4.4 : Définition d'un volume fini, proche de la paroi et éloigné de la paroi, dans un maillage.

4.4 Les conditions limites

Les conditions limites sont appliquées à tous les nœuds placés aux frontières du domaine (Fig. 4.3) et doivent être cohérentes avec le phénomène simulé. L'application

de conditions limites inadaptées conduit à des résultats imprécis, des instabilités de la résolution, et de mauvaises convergences du calcul. Les conditions limites suivantes sont généralement utilisées : la condition de paroi (i.e. adhérence pour les fluides visqueux et la condition de glissement pour le fluide dénué de viscosité), la condition d'entrée, la condition de champ lointain, la symétrie, les conditions de périodicité, et les interfaces entre différents blocs constituant le domaine.

Il est préférable d'imposer les conditions limites dans des régions assez éloignées de celle dont est porté l'intérêt. Si par exemple une condition de sortie est placée dans une région trop proche d'un obstacle présent dans l'écoulement, ce dernier ne pourra atteindre un profil de turbulence parfaitement développée en sortie de domaine. Ce mauvais conditionnement peut conduire à des erreurs numériques. Il est donc nécessaire de placer la condition de sortie dans une région pour laquelle l'écoulement n'évolue plus. Par exemple dans le cas de simulations d'écoulements au passage d'une singularité dans une conduite il est préférable de placer la condition initial trois voire quatre diamètres hydrauliques en amont et une vingtaine de diamètres hydrauliques en aval de la singularité à étudier. Pour abaisser le nombre de nœuds la condition limite d'entrée peut être imposée dans une région plus proche à condition d'imposer cette fois un profil de turbulence pleinement développée au lieu d'une vitesse constante.

4.5 Les conditions initiales

Les conditions initiales, pour toutes les variables à calculer, sont nécessaires pour entamer tout calcul numérique. Dans le cas d'un calcul permanent, les valeurs initiales des variables correspond aux propriétés d'un écoulement à partir duquel le calcul numérique va évoluer. La convergence du résultat est plus rapide si celles-ci sont proches des valeurs finales. Néanmoins, le résultat convergé ne doit pas dépendre des valeurs initiales. Dans le cas d'un calcul transitoire, ces valeurs correspondent à l'écoulement au temps initial du calcul.

La plupart des codes de calculs proposent différentes méthodes d'affectation de ces valeurs : (i) des valeurs générées automatiquement, (ii) des valeurs explicites, et (iii) la lecture d'un fichier de résultats. Dans le premier cas, le code estime les valeurs initiales à partir des conditions limites proposées par l'utilisateur. Le dernier cas est souvent utilisé lorsque des difficulté apparaissent dans la convergence. Ainsi la solution peut être calculées à partir de différentes étapes dans laquelle un paramètre voit sa valeur augmenter. Chaque champ initial d'un calcul correspondant alors à la solution du calcul précédent. De même on peut entamer une étude instationnaire à partir de la solution d'un calcul permanent réalisé dans des conditions similaires.

4.6 Les schémas numériques de convection

Dans les problèmes impliquant un écoulement de fluide, les termes de convection jouent un rôle très importants. La qualité des résultats, ainsi que la convergence

du calcul, dépendent grandement de l'estimation de cette grandeur. Il existe plusieurs méthodes d'approximation de ces termes (Upwind, power law, QUICK, etc.) se différenciant par l'ordre des schémas (premier ou second ordre généralement). Par exemple, le schéma Upwind correspond à un schéma du premier ordre, donc moins précis qu'un schéma du second ordre, mais très stable. Au contraire, l'utilisation de schémas du second ordre peut entraîner dans certains cas des problèmes de convergence. On pourra alors dans ce cas entamer le calcul à partir d'un schéma du premier ordre, puis dans une deuxième étape, réaliser un calcul basé sur les résultats de ce calcul en utilisant cette fois un schéma du second ordre. Les risques d'oscillations de la solution sont diminués par cette procédure.

4.7 Convergence d'un calcul

Une étape importante lors d'un calcul est l'observation de la convergence de ce calcul. Ceci peut être réalisé à partir du tracé d'un paramètre appelé résidu. Ce dernier est estimé pour chaque équation résolue par le code de calcul. Le but de cette section est de présenter brièvement la notion de résidu, et les améliorations possibles à apporter pour atteindre une bonne convergence.

4.7.1 Les résidus

L'application des équations de bilan sur les n volumes finis, construits par discrétisation spatiale du domaine, permet d'écrire un système composé de n équations avec n inconnues :

$$[A][x] = [b] \quad \text{ou} \quad \sum_{j=1}^n A_{ij}x_j = b_i \quad (4.2)$$

Ce système relie les solutions estimées au centre d'un volume fini à celles placées dans les volumes voisins. Tel qu'apparaît le système algébrique, la solution x_j pourrait être estimée par inversion de la matrice A_{ij} . Cependant ces matrices sont remplies sur une grande majorité d'éléments de valeur nulle et une méthode directe d'inversion de matrices, de grandes tailles et conditionnées de la sorte, conduirait à des erreurs. Les méthodes itératives apparaissent comme étant plus adaptées et permettent alors d'obtenir les solutions x_j en n'inversant pas directement la matrice A_{ij} [10]. Cette méthode isole la solution x_i telle que

$$A_{ii}x_i = b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ij}x_j$$

La solution du membre de gauche est évaluée à l'itération (k), *i.e.* $x_i^{(k)}$, à l'aide des solutions du membre de droite évaluée quant à elle à l'itération précédente ($k-1$), *i.e.* $x_j^{(k-1)}$:

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1, j \neq i}^n \left(-\frac{A_{ij}}{A_{ii}} \right) x_j^{(k-1)} + \frac{b_i}{A_{ii}}$$

Une manipulation peut faire apparaître le terme $x_i^{(k-1)}$ dans le membre de droite. On obtient :

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \sum_{j=1}^n \left(-\frac{A_{ij}}{A_{ii}} \right) x_j^{(k-1)} + \frac{b_i}{A_{ii}} \quad (4.3)$$

Ainsi, les solutions estimées à l'itération $(k-1)$ sont utilisées pour prédire celles à l'itération (k) . Néanmoins, par le jeu des approximations numériques, la solution x_j atteinte à l'itération (k) ne satisfait pas le système d'équations précédents, d'où :

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} x_j^{(k)} \neq b_i$$

On définit alors le résidu $r_i^{(k)}$ pour l'équation i après l'itération (k) comme la différence entre le membre de droite et le membre de gauche :

$$r_i^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j^{(k)}$$

Si la résolution converge de façon satisfaisante, les solutions intermédiaires $x_j^{(k)}$ se rapprochent de celles de l'itération précédente et les résidus tendent alors vers une valeur nulle. Le résidu moyen considérant les n équations, c'est à dire en considérant toutes les solutions atteintes sur les volumes finis du domaine, vaut :

$$\bar{r}^{(k)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |r_i^{(k)}|$$

Il est souvent utile de normaliser cette quantité par le résidu de la première itération :

$$R = \frac{\bar{r}^{(k)}}{\bar{r}^{(1)}}$$

Ceci rend plus facile la comparaison des convergences des autres solutions. Ainsi il existe autant de résidus qu'il y a d'équations à résoudre sur les volumes finis : les équations selon x , y , et z , les équations de transport des variables caractérisant la turbulence (k , ϵ , ω , etc.).

4.7.2 La sous-relaxation

La convergence n'est pas toujours satisfaisante et dans ce cas la solution ne doit pas être utilisée pour une analyse de l'écoulement réel. Ceci peut être le cas lorsque les conditions limites ne sont pas adaptées, lorsque le maillage est trop grossier et nécessite donc un raffinement dans des régions impliquant des gradients importants, ou lorsque des effets dynamiques sont importants rendant instable la solution. Une solution consiste alors à "ralentir" la marche de la résolution numérique par l'introduction de coefficients de relaxation, α , dans les équations précédentes. Ainsi la

solution à l'itération (k) est estimée à partir d'une partie seulement de celle estimée à l'itération ($k - 1$) :

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \alpha \left(\sum_{j=1}^n \left(-\frac{A_{ij}}{A_{ii}} \right) x_j^{(k-1)} + \frac{b_i}{A_{ii}} \right) \quad (4.4)$$

Des valeurs du coefficient $0 < \alpha < 1$ conduit à la technique de sous-relaxation, et $\alpha > 1$ à la technique de sur-relaxation.

La convergence des résidus normalisés de l'équation de mouvement selon x est tracée sur la figure 4.5 pour le cas d'un écoulement très rapide au passage d'un nombre infini de cylindres circulaires alignés (utilisation de condition de périodicité dans ce cas). En absence de sous-relaxation, le calcul est arrêté par le code de calcul alors qu'une convergence satisfaisante est atteinte dès lors qu'une sous-relaxation est imposée à l'évolution de la solution. On note ainsi que la sous-relaxation permet d'atteindre des solutions convergées dans des cas difficiles avec cependant un nombre d'itérations plus importants.

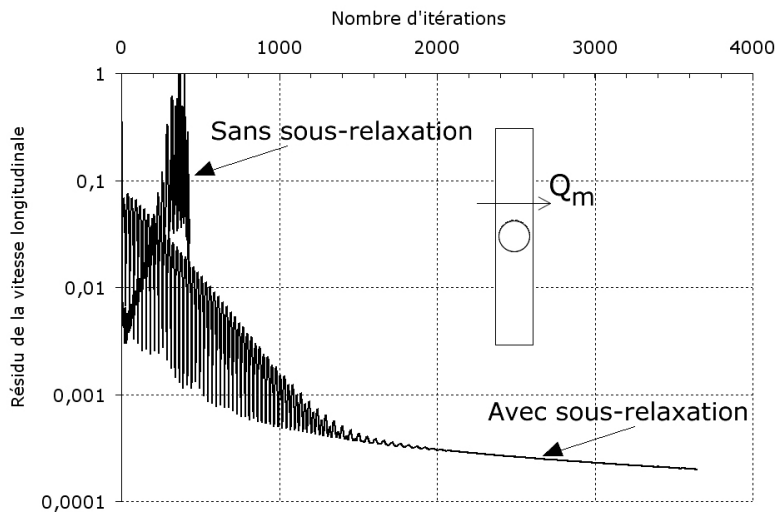


FIGURE 4.5 : Influence de la technique de sous-relaxation sur la convergence des résidus des équations selon x .

4.7.3 Calcul permanent à partir d'une approche pseudo-transitoire

On note une similitude des équations obtenues pour l'application de la technique de sous-relaxation d'une résolution d'un écoulement permanent d'une part, et celles obtenues à l'aide d'une discrétisation temporelle d'autre part. On peut alors mettre en évidence une relation analytique entre le coefficient de relaxation α du calcul permanent et le pas de temps de l'approche transitoire, dt . Certains codes de calculs utilisent alors cette possibilité d'obtenir les effets de la sous-relaxation sur un calcul permanent au moyen d'un calcul pseudo-transitoire utilisant un pseudo pas de temps.

Deuxième partie

Exemples de prédictions numériques d'écoulements et d'échanges thermiques

Intérêt des études de la deuxième partie du document

La suite du document propose quelques études visant à estimer numériquement les champs aérodynamiques, ainsi que les champs thermiques lorsque les transferts de chaleur ne sont plus négligeables, dans des cas standards. Ces calculs ont été menés à partir de trois codes du commerce : Ansys-Flotran, Ansys-CFX, et Fluent. Le premier repose sur la technique des éléments finis très utilisée en calcul de structure, et les deux autres sur la méthode numérique des volumes finis tout particulièrement adaptée à la prédiction des écoulements de fluide.

Il est important de comprendre que l'intérêt principal de ces études n'est pas de s'arrêter sur la forme des champs aérodynamiques et thermiques estimés mais plutôt de s'imprégner des méthodes utilisées pour aboutir à ces solutions. Ces études permettront d'autre part d'observer les influences de maillages ou modèles de turbulence sur le résultats finaux. Ainsi le chapitre 5 se propose d'estimer le champ aérodynamique d'un écoulement au passage d'une colline, le but étant de s'intéresser aux résultats atteints par différents modèles de turbulence. On s'intéresse ensuite (chapitre 6) à un écoulement au passage d'un obstacle prismatique, le but étant de mettre en évidence la méthode d'estimation d'un pas de temps adapté pour l'observation d'instabilités. Le chapitre 7 soulève le problème des conditions limites à imposer à l'entrée d'une conduite afin d'être au plus près des grandeurs réelles. Un calcul annexe est mené et permet d'estimer des profils transversaux des grandeurs moyennes et turbulentes, qui seront ensuite considérées comme des conditions limites dans le calcul principal. Les profils obtenus à partir de cette méthode seront confrontés à ceux donnés par une formulation analytique. Le chapitre 8 vise quant à lui à montrer la disparité des résultats obtenus à partir de modèles haut-Reynolds et un modèle bas-Reynolds. Pour cela, on considère un échange thermique convectif entre un écoulement et un obstacle élané. La qualité des prédictions numériques sera jugée par comparaison avec des résultats expérimentaux obtenus dans des configu-

rations identiques. Enfin, le chapitre 9 met en évidence l'influence de la finesse d'un maillage sur la prédiction des échanges thermiques basée sur l'utilisation du modèle $k - \epsilon$. Une discussion est menée à propos de l'adéquation entre la taille de la première maille et la loi de paroi non-équilibrée employée dans cette étude.

Cas test : 2D Model Hill Flow

On désire dans cette étude confronter les résultats obtenus par le code de calcul FLOTRAN avec ceux obtenus dans une configuration réelle. On choisit pour cela un cas test appelé 2D Model Hill Flow¹ (Fig. 5.1), mené par Almeida et. al [2] en 1992.

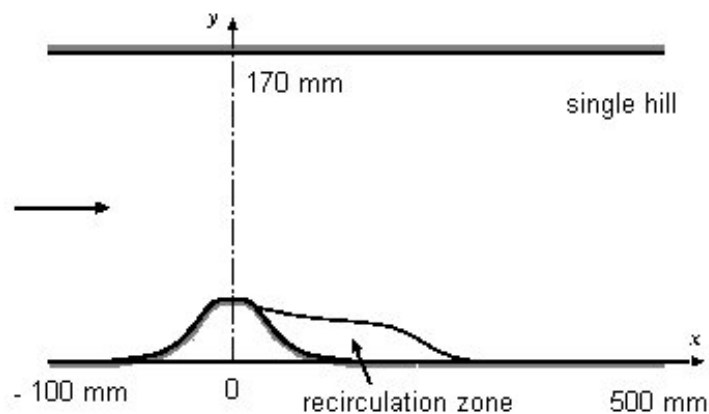


FIGURE 5.1 : Cas test 2D Model Hill Flow (d'après [2]).

L'auteur met à la disposition des numériciens le profil de la colline (fonction polynômiale), le profil de vitesse en entrée de veine d'essai (Fig. 5.2.a), et les profils de vitesse à différentes abscisses (Fig. 5.2.b). Les mesures ont été effectuées par la méthode L.D.V. (Laser Doppler Velocimeter).

¹. Les données expérimentales sont disponibles sur le site internet <http://ercof-tac.mech.surrey.ac.uk/>

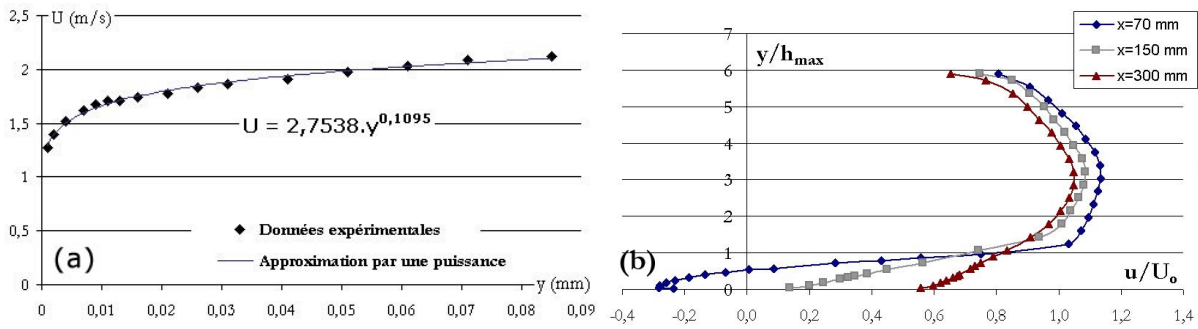


FIGURE 5.2 : Données expérimentales du cas test (a, vitesse longitudinale à l'entrée ; b, vitesses longitudinales à trois abscisses de la veine) ; d'après Almeida [2].

5.1 Approche numérique

5.1.1 Domaine de calcul et maillage

L'écoulement est calculé sur un domaine représentant une partie du tunnel hydraulique dans lequel a été effectué l'ensemble des mesures. L'entrée et la sortie sont placés respectivement à des distances égales à $3H$ et $30H$ du centre de la colline, H représentant sa hauteur. La hauteur du domaine est placées à une longueur de $6,071H$ identiquement au tunnel.

Le maillage est inhomogène et constitué d'éléments inclinés selon l'écoulement (Fig. 5.3).

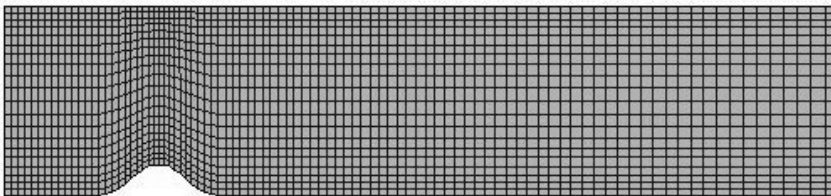


FIGURE 5.3 : Maillage de l'étude de l'écoulement au passage d'une colline.

Le système d'équations de Navier-Stokes moyennées sera fermée à partir de plusieurs modèles de turbulence, un modèle à zéro équation de transport, le modèle $k - \epsilon$ standard, et le modèle $k - \epsilon$ RNG.

Le modèle de fermeture à zéro équation est le plus simple des trois modèles étudiés ici, et dans ce cas la viscosité turbulente est estimée par la relation

$$\mu_T = \rho L_s \sqrt{\Phi}$$

où Φ est le taux de dissipation visqueuse, et L_s une longueur, respectivement

$$\Phi = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad \text{et} \quad L_s = \begin{cases} L_x & \text{si } L_x > 0 \\ \min\{0,4L_n; 0,09L_c\} & \text{si } L_x \leq 0 \end{cases}$$

avec L_x une échelle représentant l'obstacle (ici la hauteur de la colline), L_n la distance entre le nœud considéré et la paroi la plus proche, et L_c étant la valeur la plus élevée de L_n .

Les deux autres modèles ont été présentés dans le chapitre 3.

5.1.2 Conditions limites

On impose sur les nœuds de l'entrée le profil expérimental de vitesse, ainsi qu'une intensité turbulente de 3%. Une condition d'adhérence est imposée sur les nœuds des surfaces inférieure et supérieure, et une condition de turbulence pleinement développée en sortie.

5.2 Résultats numériques

Les résultats du code font apparaître une zone de recirculation comme le montre l'expérience, mais plus ou moins grande selon le modèle de turbulence employé. Les figures 5.4.a et 5.4.b représentent ces recirculations respectivement pour un modèle ke et RNG.

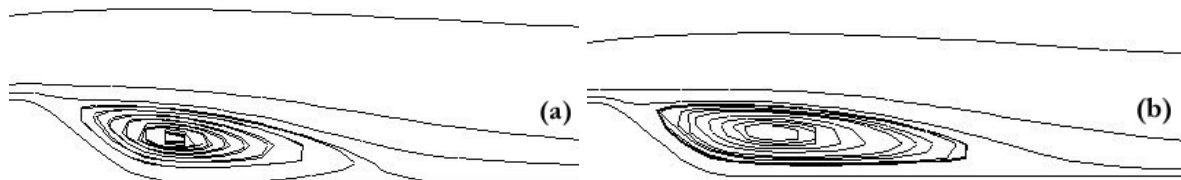


FIGURE 5.4 : Écoulement autour de la colline, d'après FLOTRAN. a, modèle ke ; b, modèle RNG.

La confrontation des vitesses expérimentales et celles simulées par différents modèles de turbulence, ceci pour différentes abscisses, est illustrée sur la figure 5.5.

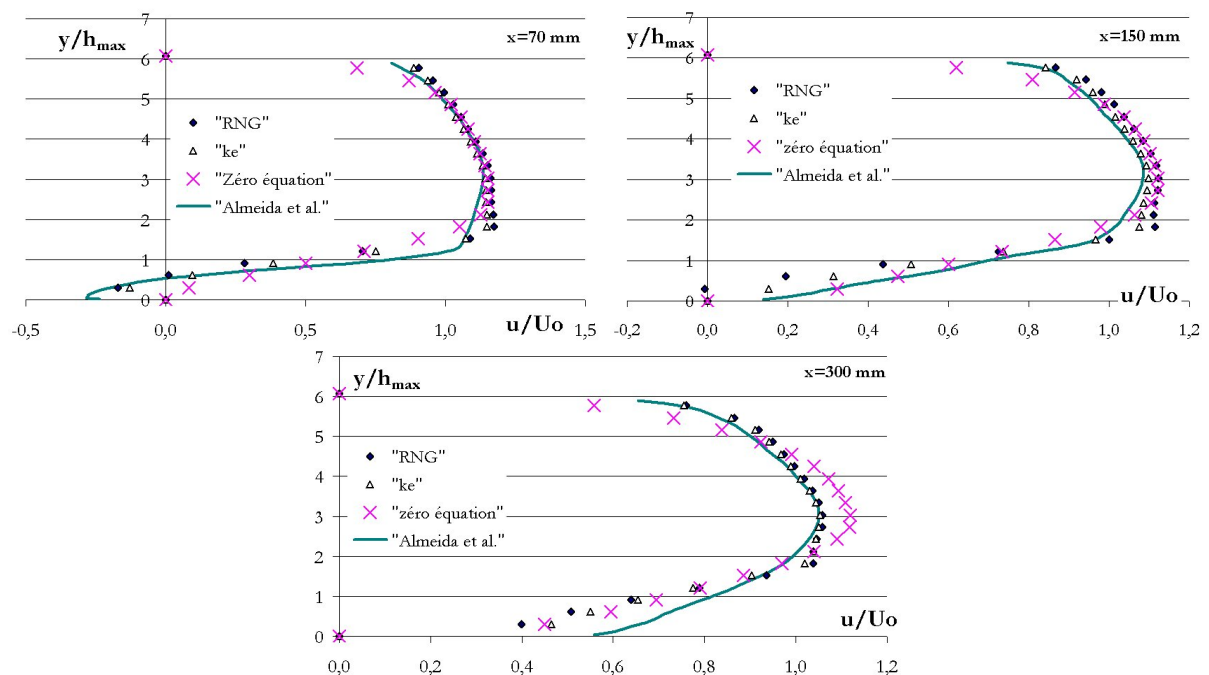


FIGURE 5.5 : Comparaison des données expérimentales [2] et celles de FLOTRAN.

On remarque que le modèle le plus simple, à zéro équation, d'une part ne prédit qu'une très faible zone de recirculation. A l'abscisse $x=70$ mm, celle-ci n'existe déjà

plus. Ce modèle surestime en conséquence une vitesse d'écoulement trop élevée au centre de la veine d'essais pour des abscisses éloignées de la colline. Ce modèle est à proscrire pour cette étude.

Les autres modèles, quant à eux, restent proches des mesures pour cette abscisse ainsi que celles situées plus en amont. On ne retrouve cependant pas le fort gradient de vitesse pour des distances proches de la paroi ($y/h_{\max} < 1$), alors que celui-ci est pratiquement restitué sur la paroi supérieure ($y/h_{\max} > 5$). Ceci n'est pas consécutif au maillage, le critère y^+ est situé entre 8 et 600, l'estimation la plus faible étant dans la zone de recirculation.

Les résultats, plutôt satisfaisants, sont équivalents. On ne peut pas dans ce cas estimer lequel des deux modèles à deux équations de transport est le mieux adapté à cette étude.

Écoulement au passage d'un obstacle prismatique

On se propose dans cette étude de prédire numériquement le champ aérodynamique d'un écoulement au passage d'un obstacle prismatique, ici un pavé à base carrée de côté 10 cm et de hauteur 6 cm (Fig. 6.1). Les calculs seront réalisés en instationnaires afin de mettre en évidence correctement les instabilités développées par le décollement des couches limites latérales. Une des parties importantes ici est l'estimation de la valeur du pas de temps de l'approche instationnaire. L'écoulement est caractérisé par un nombre de Reynolds $Re = 1,2 \times 10^5$ basé sur le côté du pavé.

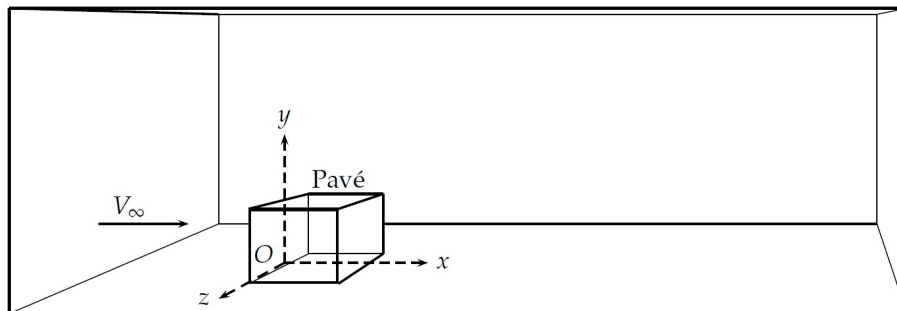


FIGURE 6.1 : Configuration du calcul visant à prédire le champ aérodynamique au passage d'un pavé.

6.1 Approche numérique

On présente dans cette section les maillages sur lesquels les calculs numériques seront effectués, ainsi que les modèles de turbulence.

6.1.1 Domaine de calcul et maillages

Le domaine de calcul est divisé en deux parties, une région proche du pavé accueillant un maillage structuré, et une deuxième région caractérisée par un maillage non structuré (Fig. 6.2). La première région s'étend sur une longueur $10H$ par rapport à la face aval du cube, et $3H$ par rapport à la face amont du cube. L'extension transversale vaut $3H$ par rapport aux faces latérales, et $3H$ pour l'extension verticale. Les extensions supplémentaires de la deuxième région valent respectivement $10H$, $5H$, $5H$, et $5H$ par rapport aux types de surfaces énoncées plus haut.

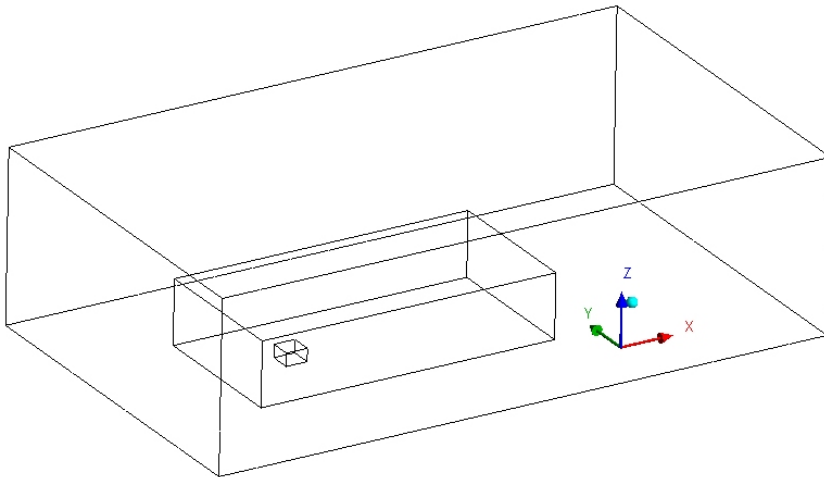


FIGURE 6.2 : Domaines d'étude

Le domaine est maillé de façon structurée dans la première région à partir du logiciel ICEM-CFD. Le maillage est caractérisé par le critère $y^+ < 1$ pour les volumes ayant en commun une face avec le cube assurant une taille de maille $y_m = 1,2 \times 10^{-5}$ m. La technique O-Grid permet de respecter ce critère tout en limitant le nombre de nœuds total (Fig. 6.3). La deuxième région est maillée de façon non-structurée à partir de CFX-Mesh. La continuité des tailles de maille est à peu près assurée au niveau des interfaces des deux domaines.

6.1.2 Conditions limites

On impose aux nœuds d'entrée une vitesse longitudinale de $18,5$ m/s et une intensité turbulente valant 1% . Les nœuds de la sortie accueillent une condition de turbulence pleinement développée (*i.e.* pression statique nulle). La localisation de cette condition est placée suffisamment loin pour satisfaire ce critère. Une condition d'adhérence est imposée aux nœuds du pavé et du sol. Une condition de symétrie est imposée sur les surfaces latérales en sortie de domaine. Des conditions d'interface sont utilisées pour les nœuds placés sur les faces communes aux deux domaines.

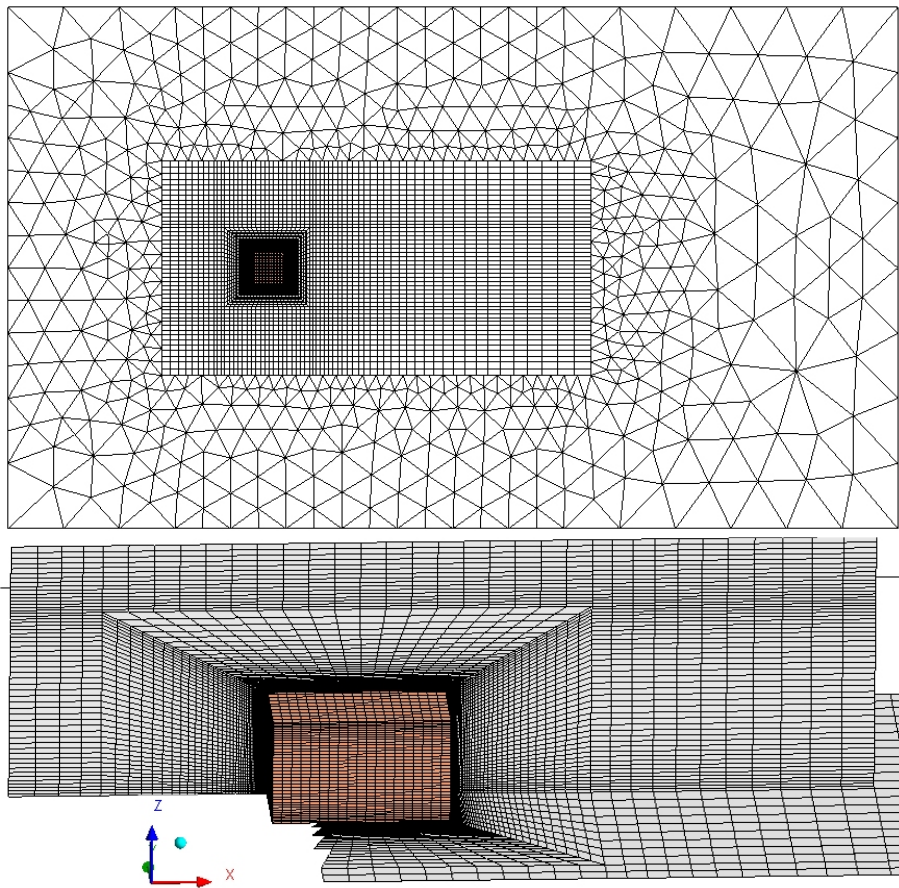


FIGURE 6.3 :
Maillage du sol des
deux régions (haut)
et de la région proche
du pavé utilisant la
technique O-Grid
(bas)

6.1.3 Modèles de turbulence

Les équations de Navier-Stokes moyennées sont fermées à l'aide du modèle de turbulence SST $k - \omega$. Ce modèle bas-Reynolds nécessite un maillage optimisé dans les régions proches des parois. Ceci est le cas *a priori* dans la région du cube. Une loi de paroi est nécessaire néanmoins pour le sol des deux domaines.

Le terme de convection des équations de mouvement est modélisé à partir du schéma du second ordre *High Resolution* lorsque la taille de maille est fine, et d'ordre 1 pour des tailles importantes.

6.1.4 Discrétisation temporelle

La valeur du pas de temps du calcul instationnaire est basée sur le temps caractéristique de la physique que l'on étudie ici, à savoir la période des lâchers de tourbillon. Dans le cas d'obstacle cylindrique circulaire de diamètre D , cas le plus étudié, le Strouhal est de l'ordre de $St = fD/V_\infty = 0,2$. Cette relation assure dans notre cas une fréquence valant $f = 46,25$ Hz avec $D \equiv H = 10$ cm, et donc une période $T = 2,2 \times 10^{-2}$ s. On peut alors définir une valeur de pas de temps basée sur la formulation $\Delta t = T/n$ où n est un entier permettant de maîtriser la finesse de la discrétisation temporelle. Lorsque la valeur de n est faible (par exemple $n = 10$) la valeur du pas de temps est telle qu'il faille 10 pas de temps par période. Lorsque la valeur de n est plus élevée cette fois-ci, le calcul effectuera plus de pas de temps par

période augmentant alors le temps de calcul. On ne peut pas définir *a priori* la valeur optimale du paramètre n , et le numéricien devra alors réaliser une étude dans laquelle il s'intéressera à l'influence de la valeur de n sur la valeur numérique du critère physique qui l'intéresse (ici le coefficient de traînée par exemple). Dans le cas présent, on choisira une valeur assez élevée, soit $\Delta t = T/50 = 4,4 \times 10^{-4}$ s. On s'attend néanmoins à obtenir un nombre de Strouhal plus faible consécutivement à la présence de bord saillant.

La convergence du calcul est vérifiée par l'évolution des résidus des paramètres calculés sur l'ensemble des volumes finis des deux domaines, et à l'aide de l'évolution de la traînée et de la portance (horizontale).

6.2 Résultats numériques

6.2.1 Validation du maillage sur le pavé

Les valeurs du critère y^+ sont inférieures à 3 sur la surface du pavé. L'utilisation du modèle de turbulence SST $k - \omega$ est donc optimale, le code n'utilisant pas de loi de paroi dans ce cas. Les valeurs de ce critère au niveau du sol sont plus étendues. Les valeurs maximales observées valent 111 dans les régions d'accélération de l'écoulement (par exemple dans la région proche-amont du pavé).

6.2.2 Efforts aérodynamiques

Les coefficients de portance et traînée valent en moyenne respectivement 0 et 1,1, valeurs en accord avec les observations habituelles. On observe d'autre part des fluctuations des efforts aérodynamiques consécutivement aux lâchers d'instabilités par l'obstacle (Fig. 6.4). Le nombre de Strouhal, évalué à partir des variations temporelles de la portance et basé sur la largeur du pavé, vaut $St = 0,12$. Cette valeur est cohérente avec celles communément observées pour des obstacles non-arrondis (i.e. $0,1 < St < 0,2$). Le spectre associé à la traînée est caractérisé par des fréquences plus élevées comparativement à celui associé à la portance. Ceci doit être dû aux effets des instabilités générées par le décollement de la couche limite influençant grandement la traînée.

La valeur non-nulle de l'effort de traînée est lié à la forte décélération de l'écoulement dans la région proche-amont du pavé entraînant une augmentation de la pression (Fig. 6.5).

6.2.3 Sillage du pavé

Le sillage du pavé est fortement agité ayant pour conséquence des fluctuations de pression pariétale importantes dans cette région. Les points placés au sol en-dessous d'une instabilités sont caractérisés par une dépression importante, celle-ci se déplaçant ensuite légèrement dans des régions plus en aval. D'autre part des surpressions quasiment fixes sont observées à une distance de l'ordre de $2H$ en aval de l'obstacle.

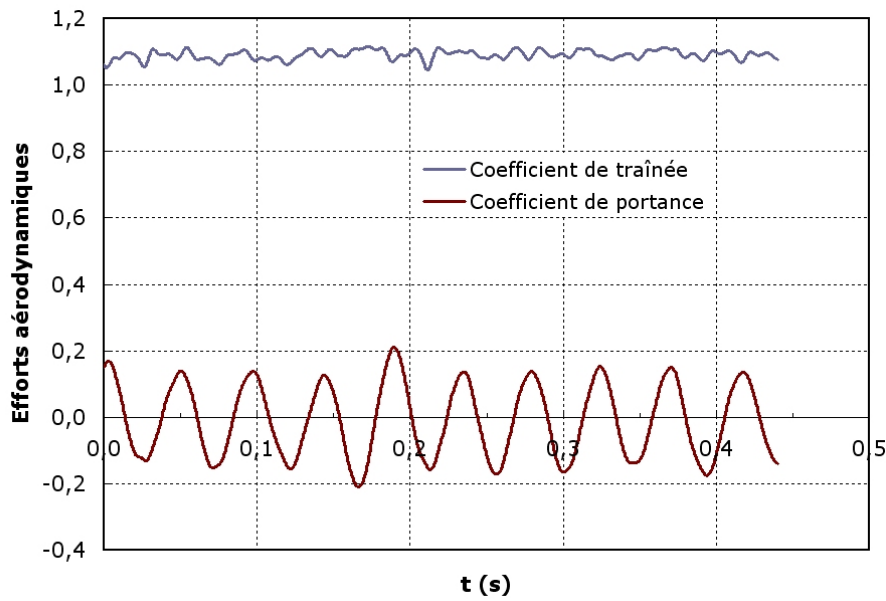


FIGURE 6.4 : Évolution temporelle des efforts aérodynamiques.

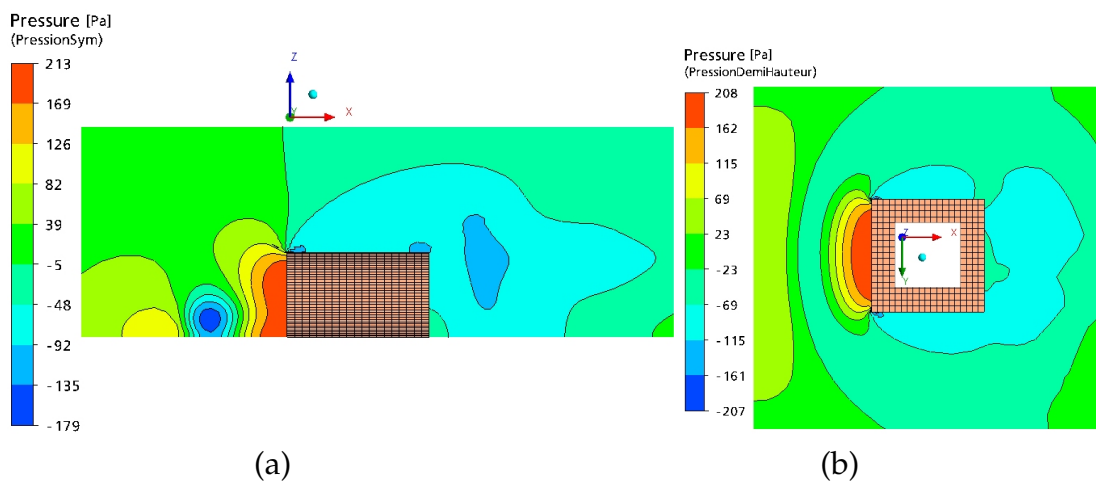


FIGURE 6.5 : Champ de pression dans le plan symétrique (a) et dans un plan placé à mi-hauteur du pavé (b).

Les structures sont observables à partir du paramètre second invariant, Q :

$$Q = -\frac{1}{2} (\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} - \bar{\Omega}_{ij} \bar{\Omega}_{ij}) \quad (6.1)$$

avec \bar{S}_{ij} le tenseur de cisaillement et $\bar{\Omega}_{ij}$ la partie antisymétrique du tenseur de gradient de vitesse. On observe d'après ce paramètre un tourbillon étiré dans la région aval au pavé, et des instabilités convectées ensuite par l'écoulement principal (Fig. 6.7).

6.3 Conclusion

Le champ aérodynamique d'un écoulement au passage d'un obstacle prismatique a été obtenu dans cette étude. La valeur du pas de temps basé sur l'estimation *a priori*

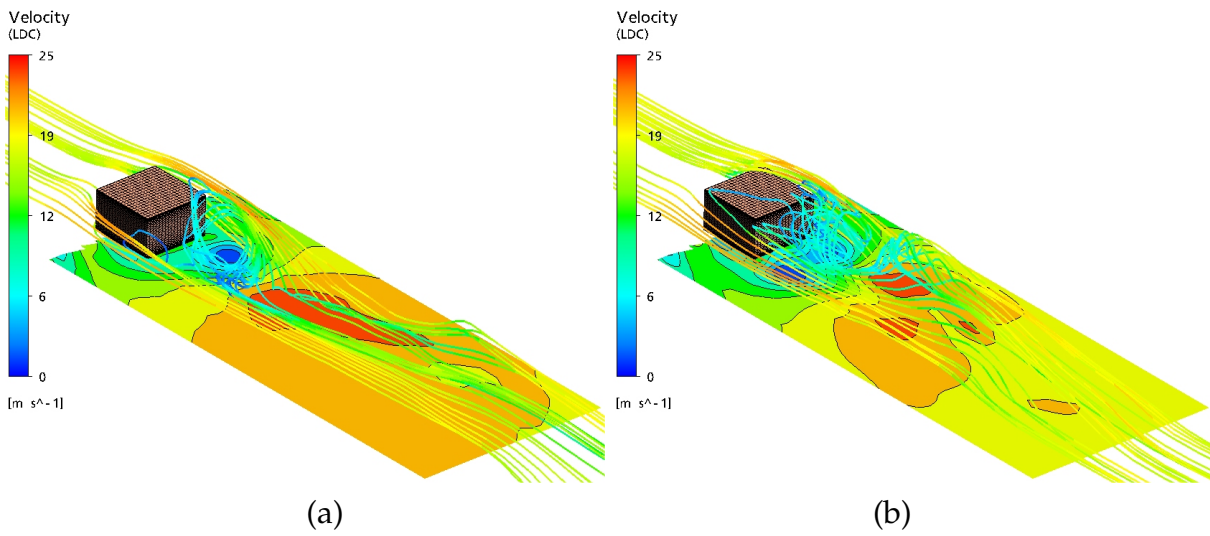


FIGURE 6.6 : Pression pariétale dans le sillage du pavé (a, t_0 ; b, $t_0 + 40\Delta t$).

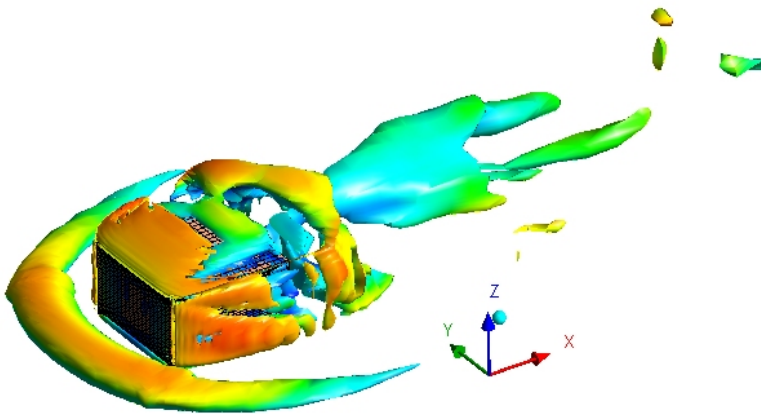


FIGURE 6.7 : Valeur instantanée de l'invariant Q .

du Strouhal paraît adaptée à l'observation des instabilités générées par le décollement des couches limites des surfaces latérales du pavé. La distribution de la pression sur les surfaces du pavé génère une traînée non-nulle et des efforts de portance fluctuant autour d'une valeur nulle. Le sillage est fortement instable et est caractérisé par une distribution de pressions pariétales inhomogène.

Étude des paramètres turbulents dans un canal

La qualité des prédictions d'écoulements dans un canal repose en partie sur les conditions limites d'entrée. La méthode la plus réaliste consiste à imposer aux nœuds de l'entrée des profils expérimentaux pour les variables moyennes de l'écoulement (vitesses et température par exemple), ainsi que pour les paramètres associés à la turbulence (énergie cinétique turbulente, taux de dissipation, dissipation spécifique, etc.). Lorsque ces données expérimentales sont absentes, il est néanmoins possible d'imposer des profils estimés soit à partir d'un calcul dît annexe, soit à partir d'une formulation analytique.

Le but de cette étude est d'obtenir les profils d'entrée d'un écoulement dans un canal plan, et de les comparer à ceux proposés par une formulation analytique. On considère un canal plan parcouru par un écoulement d'air de vitesse moyenne égale à 3 m/s (Figure 7.1).

7.1 Approche numérique du calcul annexe

Le calcul annexe est basé sur une partie du canal et ne nécessite pas la modélisation de sa longueur totale. On impose aux nœuds des surfaces une condition d'adhérence, et sur les nœuds d'"entrée" et de "sortie" une condition de périodicité. L'écoulement sera imposé par un débit massique par unité de profondeur (le calcul est effectué en 2D) égal à 0,735 kg/m.s.

Une fois le calcul effectué par le code, on s'intéressera aux profils de la vitesse longitudinale moyenne, d'énergie cinétique turbulente, et du taux de dissipation. Ces profils ainsi estimés pourront être imposés comme condition limite à l'entrée d'un domaine de même dimension, et caractérisé par un débit massique identique.

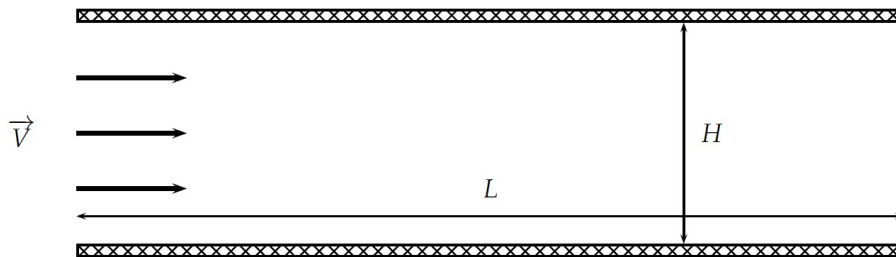


FIGURE 7.1 : Configuration de l'écoulement dans le canal.

Le domaine n'est pas nécessairement long car les profils vont être identiques quel que soit l'emplacement longitudinal. Dans notre cas, la hauteur vaut 20 cm et la longueur 5 m. Le maillage est structuré avec des éléments alignés dans le sens de l'écoulement (Figure 7.2). La taille des mailles proches des parois est choisie a priori pour satisfaire une valeur du y^+ proche de 30. Ceci est réalisé à partir de la relation

$$y^+ = y \frac{u_f}{\nu} \quad (7.1)$$

avec une vitesse de frottement, u_f , supposée être égale à 5% de la vitesse extérieure V . On obtient ainsi la taille de la première maille dans la région de paroi. Le nombre d'élément dans la direction longitudinale est quant à lui égal à 100.

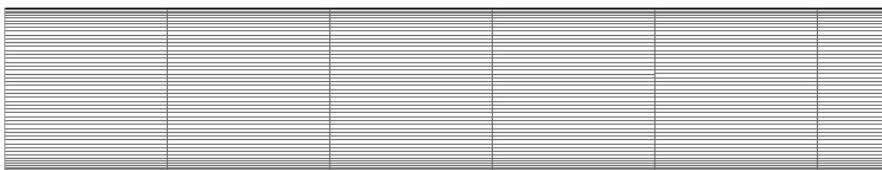


FIGURE 7.2 : Maillage de l'étude.

Les équations de Navier-Stokes (incompressible et stationnaire) sont résolues sur le maillage cité précédemment à partir du code commercial FLUENT. Toutes les équations sont résolues au centres des volumes de contrôle et les valeurs aux frontières de ces volumes sont estimées par interpolation avec un schéma au premier ordre. Le couplage pression-vitesse est estimé au moyen de l'algorithme SIMPLE. La fermeture des équations est obtenue au moyen d'un modèle de turbulence $k-\epsilon$ standard associé à une loi de paroi du type standard. Cette dernière permet de calculer les caractéristiques de l'écoulement se situant entre la paroi (où les effets visqueux sont prépondérants) et la première maille normale à la paroi. Enfin, le calcul est convergé lorsque la somme des résidus est inférieure à 10^{-3} pour l'ensemble des paramètres.

La convergence est d'autre part vérifiée par la stabilité du débit masse en sortie du domaine, et celle de l'énergie cinétique turbulente estimée sur des marqueurs placés dans la couche limite supérieure.

7.2 Résultats numériques

Afin de visualiser correctement l'évolution longitudinale des profils de vitesse longitudinale, d'énergie cinétique turbulente, et du taux de dissipation, on considère des lignes verticales placées à différentes distances de l'entrée $0H$, $5H$, $10H$, $15H$, $20H$, et $25H$ appelé dans cet ordre Ligne1 à Ligne6.

Les profils de la vitesse longitudinale, de l'énergie cinétique turbulente, et du taux de dissipation sont identiques, quelle soit la ligne d'observation (Fig. 7.3 et 7.4). Ils correspondent alors à un profil parfaitement développé. L'évolution transversale de l'énergie cinétique turbulente montre une décroissance quasi linéaire lorsque le point d'observation s'éloigne de la paroi. Le taux de dissipation est caractérisé, quant à lui, par une chute brutale de sa valeur pour atteindre une valeur constante dans une grande majorité de la conduite.

7.3 Approximation analytique des grandeurs turbulentes

Nous proposons dans cette partie une formulation de l'évolution transverse de l'énergie cinétique et du taux de dissipation dans le cas d'un écoulement dans une conduite. Avant cela, nous nous intéresserons à l'évolution du profil de la vitesse longitudinale qui peut être approchée par la loi en puissance "1/7" :

$$u(y) = u_{CL} \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7}$$

où u_{CL} est la vitesse au centre du canal, et δ la demi-hauteur du canal. Les vitesses longitudinales numériques et analytiques sont proches (Figure 7.5).

Connaissant la forme des évolutions de ces paramètres dans la région proche de la paroi (loi de paroi), on suppose que l'énergie cinétique turbulente à l'entrée varie de la valeur pariétale

$$k_{nw} = \frac{u_f^2}{C_\mu^{1/2}}$$

jusqu'à une valeur au centre du canal

$$k_{CL} = \frac{3}{2}(0,01u_{CL})^2$$

avec u_f la vitesse de frottement, C_μ une constante égale à 0,09. La vitesse de frottement est exprimée à partir de la contrainte pariétale et de la masse volumique, $u_f = \sqrt{\tau_p/\rho}$. La contrainte pariétale peut être estimée à partir du modèle du coefficient de frottement de Blasius dans les conduites bidimensionnelles :

$$\tau_p = f \frac{\rho u_{CL}^2}{2}, \quad f = 0,045 \left(\frac{u_{CL} \delta}{\nu} \right)^2$$

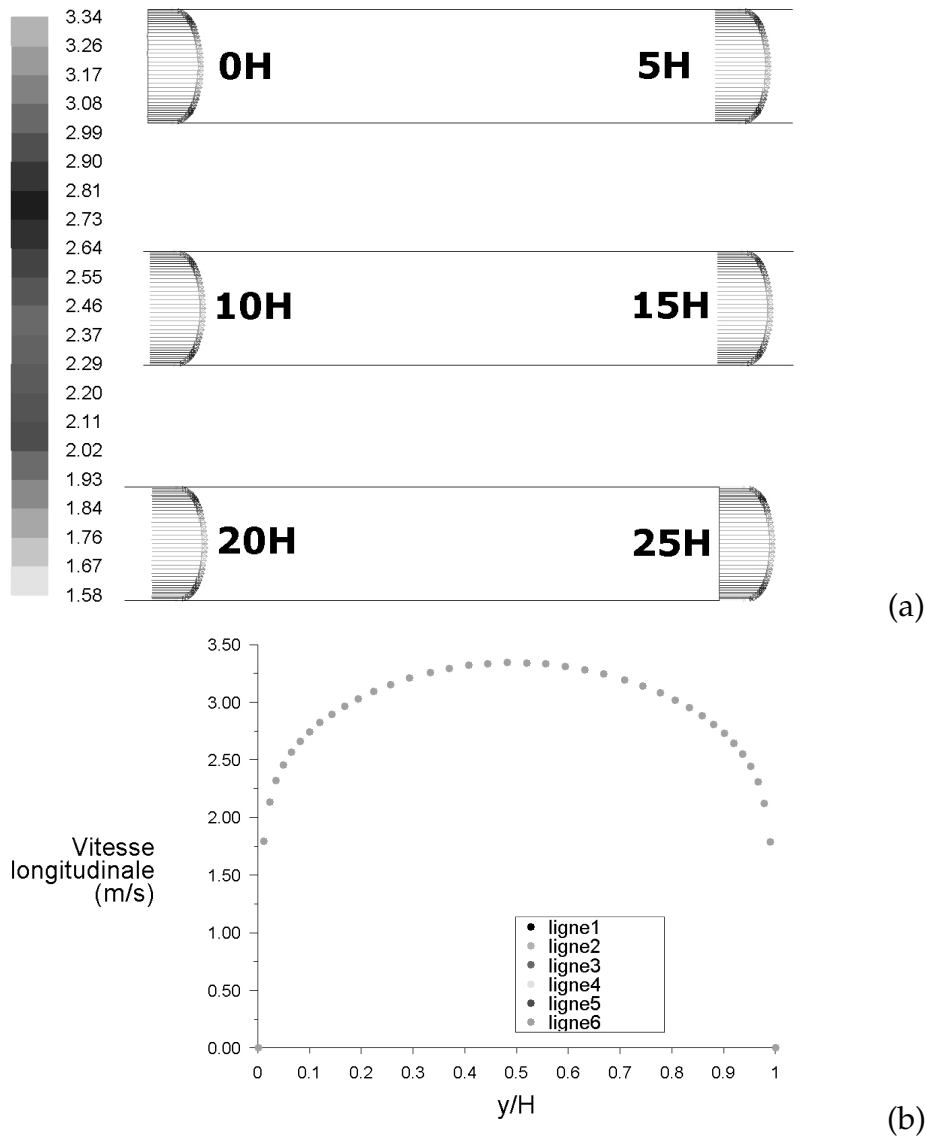


FIGURE 7.3 : Évolution de la vitesse longitudinale : a, vecteurs ; b, évolution sur les lignes de référence.

L'évolution transversale du taux de dissipation peut ensuite être calculée à partir de la valeur locale de l'énergie cinétique turbulente et de la longueur de mélange l :

$$\epsilon_i = \frac{C_\mu^{3/4} k_i^{3/2}}{l}$$

On pourra estimer la longueur de mélange à partir du modèle proposé par Prandtl :

$$l = \min(\kappa y, 0.085\delta)$$

avec $\kappa = 0,41$. Dans notre cas, les différentes valeurs sont rassemblées dans le tableau 7.1. Les valeurs numériques et analytiques sont comparées sur la figure 7.6. L'énergie cinétique turbulente analytiques sont sous-estimées dans le centre du canal, et sont correctement estimées proche de la paroi, que les taux de dissipation sont comparables pour toute position transversale.

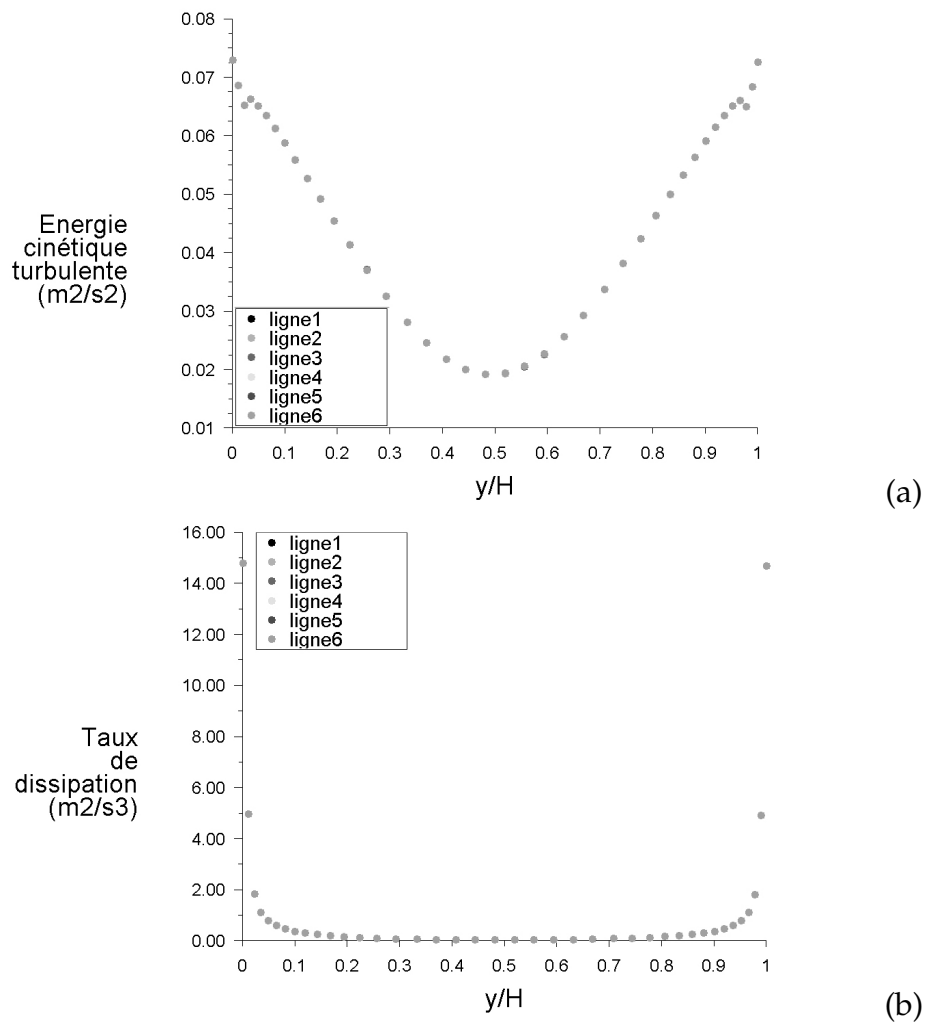


FIGURE 7.4 : Évolution longitudinale des paramètres turbulents : a, énergie cinétique turbulente ; b, taux de dissipation.

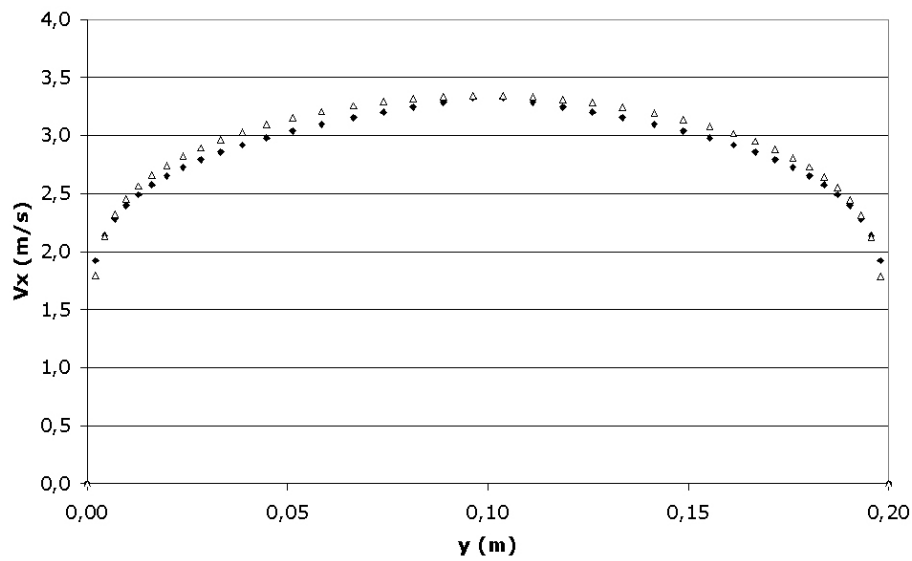
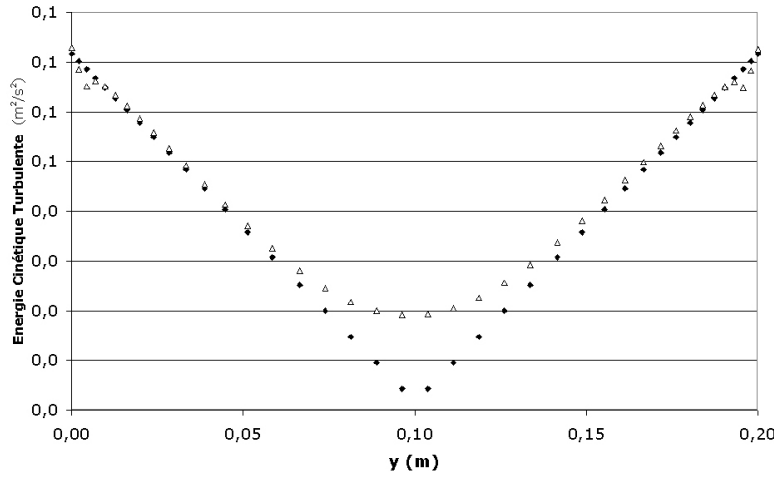


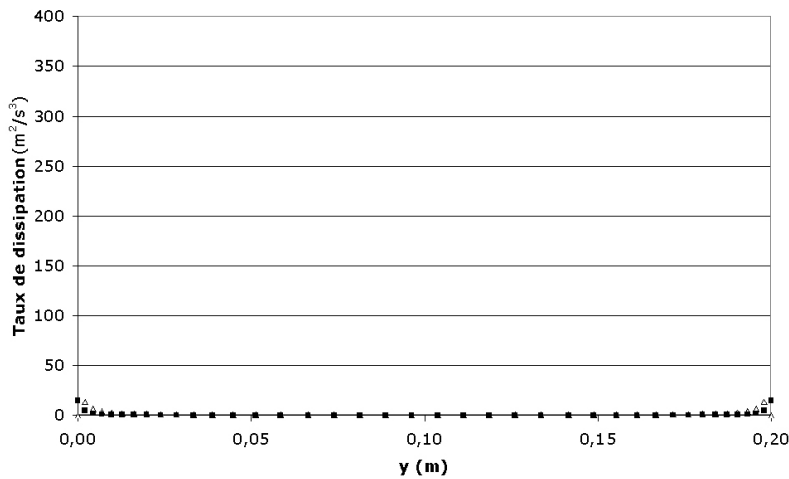
FIGURE 7.5 : Vitesse longitudinale (Δ , résultats numériques ; \blacklozenge , résultats analytiques).

TABLE 7.1 : Estimations des paramètres liés à la turbulence dans le canal.

V_x (m/s)	u_{CL}	u_f	k_{nw}	k_{CL}
15	16,4	0,589	1,16	0,04



(a)



(b)

FIGURE 7.6 : Approximation des paramètres turbulents. a, énergie cinétique turbulente ; b, taux de dissipation (\triangle , résultats numériques ; \blacklozenge , résultats analytiques).

7.4 Conclusion

L'écoulement dans un canal plan nous a permis de valider des formulations de l'évolution transversale de l'énergie cinétique turbulente et du taux de dissipation. Celles-ci pourront ainsi être utilisées pour simuler de façon la plus réaliste possible un écoulement amont à un obstacle situé dans un canal. La fonction permettant de retrouver les valeurs locales de l'énergie cinétique turbulente pourra être de la forme :

$$k(y_m) = k_{nw} + \frac{k_{CL} - k_{nw}}{\delta} y_m$$

Prédiction numérique d'un échange thermique convectif à partir de différents modèles de turbulence

On étudie ici les échanges thermiques convectifs entre un écoulement de vitesse V_∞ ayant une température T_∞ et un obstacle élancé dont la température surfacique est notée T_p (Fig. 8.1). Le but de cette étude est de comparer les résultats obtenus à partir des modèles de turbulence $k - \epsilon$ standard, $k - \epsilon$ Realizable, et SST $k - \omega$. Les résultats seront atteints à l'aide de deux maillages différents, et l'ensemble des résultats numériques pourront être comparés à des résultats expérimentaux obtenus dans des configurations identiques.

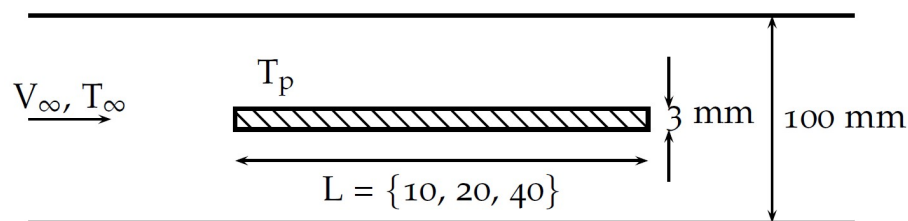


FIGURE 8.1 : Configuration de l'étude de l'échange thermique convectif (d'après Marchesse [29]).

Les résultats numériques et expérimentaux seront comparés sur différentes configurations dans lesquelles les largeurs de l'obstacle et vitesse de l'écoulement pourront varier (Tab. 8.1), alors que l'épaisseur reste fixe et égale à 3 mm, et la température d'entrée égale à 383 K quelle que soit la vitesse.

TABLE 8.1 : Valeurs des paramètres variables.

V_∞ (m/s)	3	7	9
L (mm)	10	20	40

8.1 Approche numérique

On présente dans cette section les maillages sur lesquels les calculs numériques seront effectués, ainsi que les modèles de turbulence.

8.1.1 Domaine de calcul et maillages

Le calcul est effectué sur la moitié du domaine réel (Fig. 8.2), les écarts des résultats obtenus sur le domaine entier et la moitié du domaine étant très faibles.

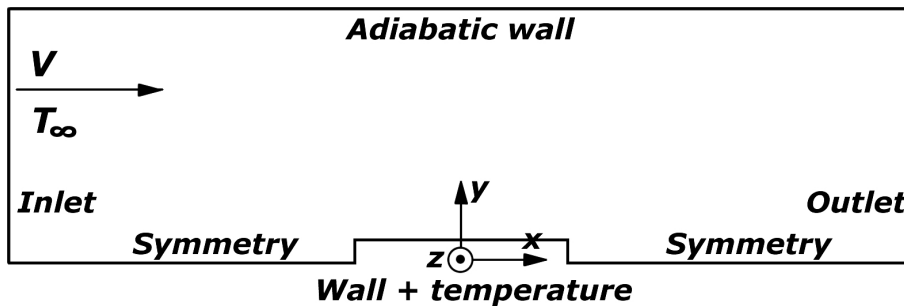


FIGURE 8.2 : Domaine du calcul et conditions aux limites (d'après Marchesse [29]).

Les équations de mouvement et de l'énergie sont résolues ensemble sur deux maillages, les mailles M_1 et M_2 caractérisés respectivement par $y^+ = 1$ et $y^+ = 0,1$. La taille de la première maille, notées y_{M1} et y_{M2} , dépend ainsi du maillage considéré, et est d'autre part d'autant plus faible que la vitesse de l'écoulement est importante. Les valeurs de la taille de cette première maille sont rassemblées dans le tableau 8.2.

TABLE 8.2 : Valeurs des paramètres variables.

V_∞ (m/s)	y_{M1} (m)	y_{M2} (m)
3	$2,1 \times 10^{-4}$	$2,1 \times 10^{-5}$
7	$9,0 \times 10^{-5}$	$9,0 \times 10^{-6}$
9	$7,0 \times 10^{-5}$	$7,0 \times 10^{-6}$

Tous les maillages sont inhomogènes et structurés avec des éléments alignés selon l'écoulement.

8.1.2 Conditions limites

Les conditions limites sont rassemblées sur la figure 8.2. On impose aux nœuds d'entrée des profils de vitesse longitudinale moyenne et des paramètres associés à la turbulence qui dépendent alors du modèle de turbulence utilisé. Ces profils sont obtenus à partir d'un calcul annexe (Voir le chapitre 7 pour plus de précision). Les températures d'entrée et de l'obstacle valent respectivement 293 K et 383 K, assurant

ainsi un échange thermique. Une condition de symétrie est imposée sur les lignes inférieures et une condition de turbulence pleinement développée en sortie de domaine. Les nœuds de la ligne supérieure accueillent une condition d'adhérence et de flux thermique nul (paroi adiabatique).

8.1.3 Modèles de turbulence

Des modèles de turbulence sont nécessaires pour fermer le système d'équation RANS. Trois modèles sont étudiés ici, les modèles $k - \epsilon$ standard, $k - \epsilon$ Realizable, et SST $k - \omega$, où k est l'énergie cinétique turbulente, ϵ le taux de dissipation, ω la dissipation spécifique. Les deux premiers modèles sont valables uniquement dans le cœur de l'écoulement. Une loi de paroi améliorée sera donc utilisée pour estimer les caractéristiques de l'écoulement dans les régions proches des parois. Dans cette loi, la région de paroi est scindée en deux régions, une sous-couche visqueuse et une sous-couche pleinement turbulente, dont la démarcation s'effectue à partir d'un nombre de Reynolds de turbulence basé sur la distance normale à la paroi :

$$\text{Re}_y = \frac{y\sqrt{k}}{\nu}$$

L'utilisation de cette loi nécessite un y^+ égal ou inférieur à l'unité.

Lorsque le modèle SST $k - \omega$ est utilisé, aucune loi de paroi est nécessaire car ce modèle est adapté aux deux types de régions. Cependant le maillage doit être construit afin de résoudre l'écoulement dans la sous-couche visqueuse (i.e. $y^+ < 1$).

Ainsi dans tous les cas, la valeur du paramètre y^+ doit être égale ou inférieure à l'unité. Les deux maillages M1 et M2 satisfont *a priori* ce critère.

8.2 Résultats numériques

Les résultats numériques et expérimentaux sont tracés sur les figures 8.3 à 8.5. On observe que les valeurs des coefficients d'échange numériques sont très proches de celles mesurées lorsque la largeur de l'obstacle est égale à 40 mm quel que soit le modèle. Pour des valeurs plus faibles de ce paramètre, on note que les modèles $k - \epsilon$ surestiment l'échange thermique. Ceci est dû à une surestimation par ces modèles de l'énergie cinétique turbulente dans la région proche du point d'arrêt[9] (Fig. 8.6), conduisant alors à un échange thermique excessif (l'écart avec les mesures vaut 40%). Les résultats numériques basés sur le modèle SST $k - \omega$ sont très proches des valeurs expérimentales, l'écart n'excédant pas 15%. Notons d'autre part que les prédictions numériques de ce modèle, obtenues cette fois sur le maillage très fin M2, sont améliorées, les écarts chutant à 3%.

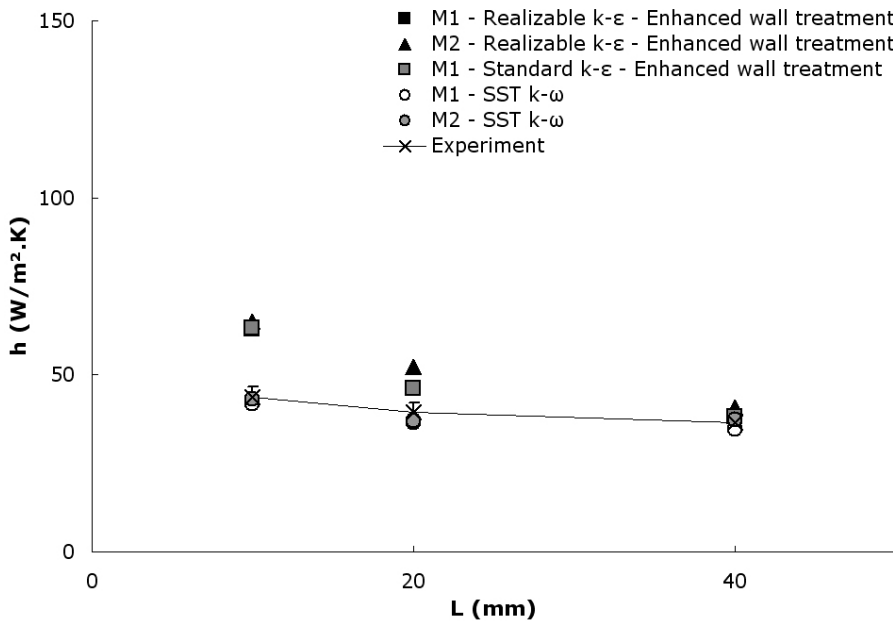


FIGURE 8.3 : Estimation du coefficient d'échange convectif ($V_\infty = 3$ m/s) — d'après Marchesse [29].

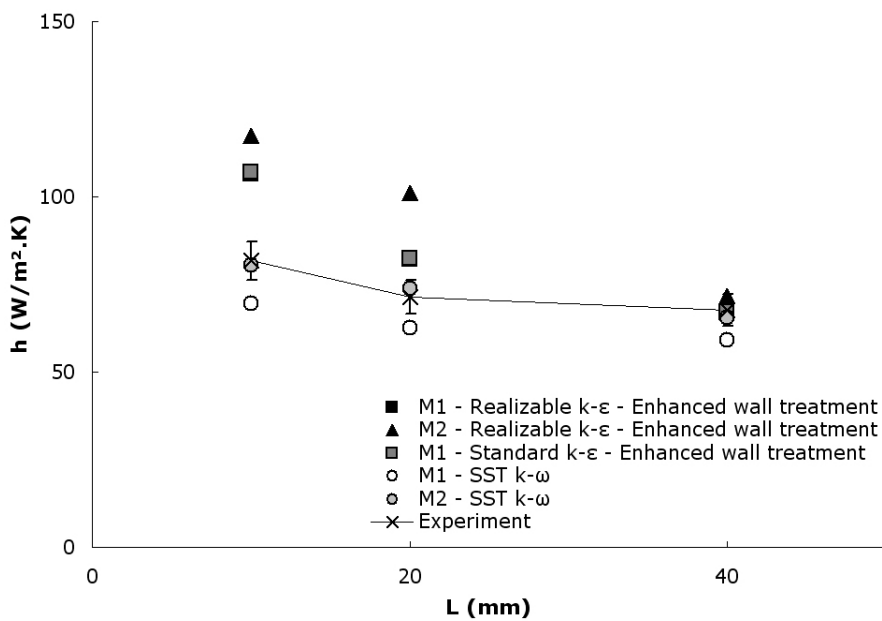


FIGURE 8.4 : Estimation du coefficient d'échange convectif ($V_\infty = 7$ m/s) — d'après Marchesse [29].

Le but de cette étude était de comparer les échanges thermiques convectifs obtenus à partir de différents modèles de turbulence et calculés sur deux maillages, à des résultats expérimentaux atteints dans des configurations identiques. Nous avons observés des différences notables entre ces résultats. Et seul le modèle SST $k - \omega$ est à même de prédire des échanges convectifs réalistes, et ceci tout spécialement lorsque le maillage est très fin ($y^+ = 0,1$). Le modèle $k - \epsilon$ surestime de façon trop importante les échanges consécutivement à une mauvaise prédiction de l'énergie cinétique turbulente dans la région proche du point d'arrêt.

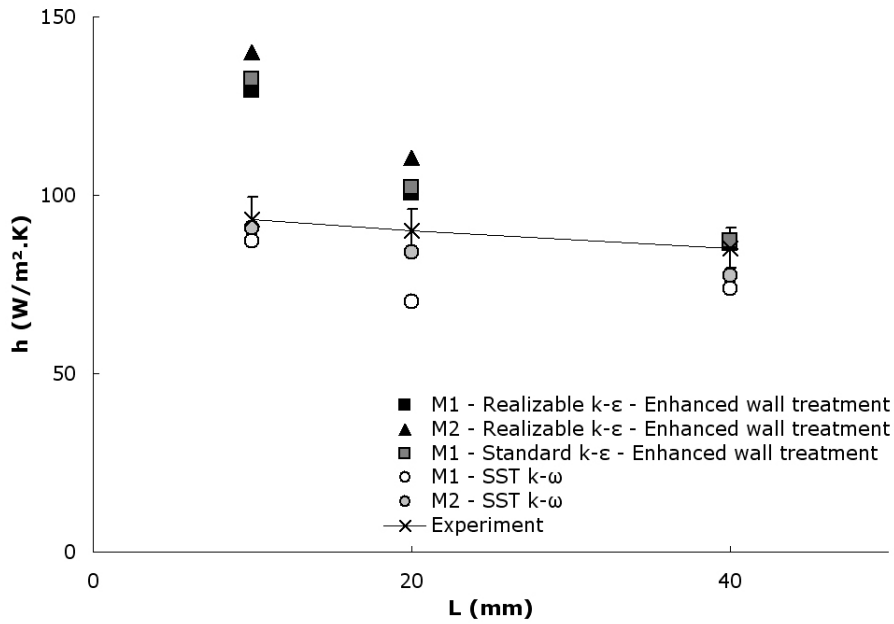


FIGURE 8.5 : Estimation du coefficient d'échange convectif ($V_\infty = 9$ m/s) — d'après Marchesse [29].

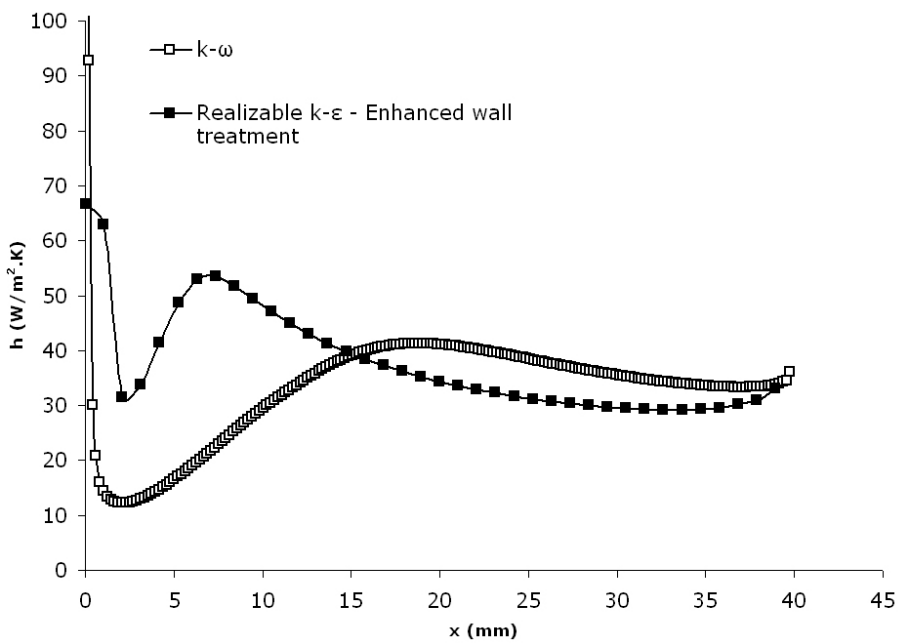


FIGURE 8.6 : Distribution du coefficient d'échange convectif le long de l'obstacle de largeur égale à 40 mm ($V_\infty = 3$ m/s) — d'après Marchesse [29].

Influence de la finesse du maillage sur la prédiction numérique des échanges thermiques convectifs d'une plaque plane

Le but de cette étude est de mettre en évidence l'influence du maillage sur la qualité de prédiction des échanges thermiques entre un écoulement et une plaque plane non-inclinée lorsque modèle $k\epsilon$ standard est utilisé. Ce modèle n'étant pas valable dans la région proche des parois, l'utilisation d'une loi de paroi permet la prédiction des caractéristiques de l'écoulement dans cette région. Cependant, la taille de la première maille doit être en adéquation avec cette loi. Nous verrons dans cette étude que l'utilisation d'une loi de paroi sur un maillage inadapté conduit à des estimations d'échanges thermiques erronées.

On considère ici un écoulement de vitesse V_∞ égale à 1 m/s et de température T_∞ égale à 353 K au passage d'une plaque plane de longueur 1 m sans inclinaison ayant une température égale à 413 K (Fig. 9.1).

9.1 Approche numérique

9.1.1 Domaine et maillage

Le domaine est construit à partir d'un carré avec la ligne inférieure représentant la plaque plane. De ce fait, la couche limite se développe dès l'entrée du domaine. Les équations de mouvement et thermiques sont résolues à partir du code commercial

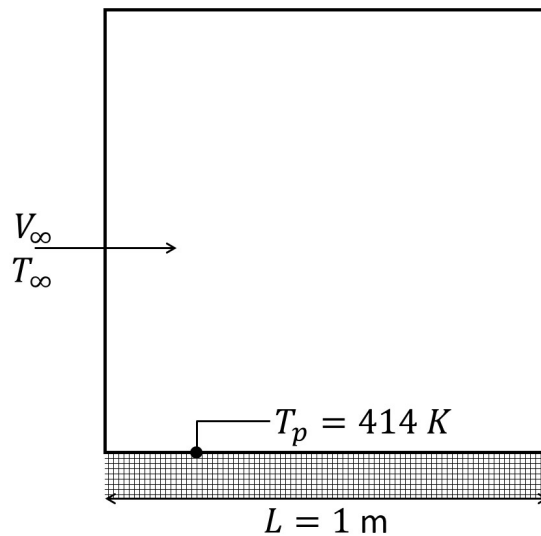


FIGURE 9.1 : Configuration de l'étude de l'influence du maillage sur la prévision des échanges thermiques à l'aide d'un modèle haut-Reynolds.

FLOTRAN sur trois maillages (M_1 , M_2 , M_3) structurés et inhomogènes (Fig. 9.2). Ces maillages diffèrent par la taille des éléments proches de la paroi, les éléments du maillage M_1 sont beaucoup plus importants que ceux du maillage M_3 .

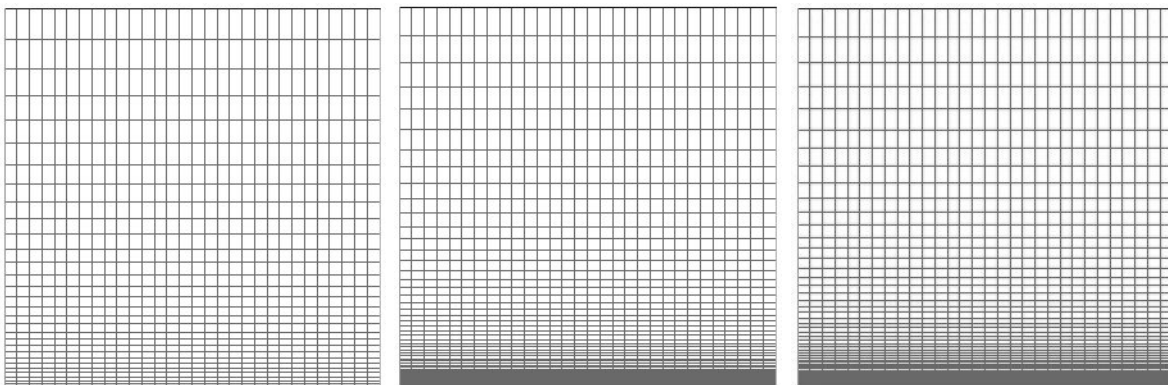


FIGURE 9.2 : Maillages de l'étude numérique des échanges thermiques entre un écoulement et une plaque plane. De la gauche vers la droite : M_1 , M_2 , M_3 .

Le système d'équations RANS est fermé à partir du modèle de turbulence $k - \epsilon$ standard, et la modélisation de l'écoulement dans la couche limite est effectuée à l'aide de la loi de paroi équilibrée nécessitant une valeur y^+ proche de 30.

9.1.2 Conditions limites

On impose aux nœuds de l'entrée une vitesse longitudinale égale à 1 m/s et une température égale à 353 K. Les nœuds de la plaque imposent une condition d'adhérence et une température égale à 413 K. On impose une condition de symétrie sur la ligne supérieure et une condition de turbulence pleinement développée en sortie.

9.2 Modèle proposé

Les échanges thermiques peuvent être caractérisés par un nombre de Nusselt local (Nu_x) en fonction du nombre de Reynolds local (Re_x) :

$$Nu_x = 0,0226 \times Re_x^{0,8} Pr^{0,6} \left(\frac{T_\infty}{T_p} \right)^{-0,4}$$

où Pr est le nombre de Prandtl. Ce modèle est valable dans la gamme de Reynolds $[10^5; 10^7]$. Ce modèle est choisi parmi d'autres disponibles car les nombres de Reynolds étant élevés ceci nous assure la présence d'une couche limite très développée. L'utilisation de la loi de paroi dans de bonnes conditions (*i.e.* y^+ proche de 30) sera d'autant meilleure.

9.3 Résultats numériques

Les résultats obtenus à partir des trois maillages sont rassemblés sur la figure 9.3. On note que les prédictions sont très différentes. Le maillage le plus fin dans la région proche de la paroi (*i.e.* M3) entraîne une forte surestimation de l'échange consécutivement à des valeurs de y^+ très faibles et non-adaptées à l'utilisation de la loi de paroi. L'utilisation d'un maillage grossier (*i.e.* M1) ne permet pas quant à lui d'estimer correctement l'échange thermique, y^+ étant proches de 300 le long de la plaque. Cette valeur n'est pas totalement inadaptée pour l'utilisation de la loi de paroi équilibrée, mais n'est pas optimisée. Ceci est obtenu à partir du maillage M2 pour lequel les valeurs du paramètres de maillage est légèrement inférieures à 30 entraînant dès lors une estimation numérique de l'échange très satisfaisante. On notera d'autre part que les évolutions du Nusselt pour les faibles Reynolds sont différentes pour M1 et M2, les courbes étant soit concaves ou convexes.

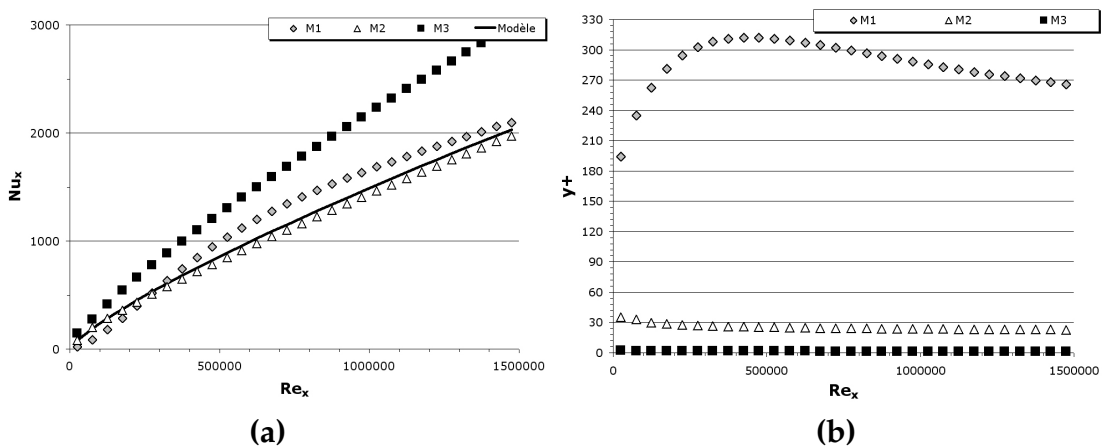


FIGURE 9.3 : Estimation numérique de l'échange thermique entre un écoulement et une plaque plane. Évolution du Nusselt local (a) et du critère de maillage (b).

102 INFLUENCE DE LA FINESSE DU MAILLAGE SUR LA PRÉDICTION NUMÉRIQUE DES ÉCHANGES
THERMIQUES CONVECTIFS D'UNE PLAQUE PLANE

Bibliographie

- [1] Interactions de vortex corotatifs. www.irphe.fr. Accédé le 14/02/2020.
- [2] G. P. ALMEIDA, D. F. G. DURAO, and M. V. HEITOR. *Wake flows behind two dimensional model hills*. *Exp. Thermal and fluid Science*, 7 :87, 1992.
- [3] C. BAILLY and G. COMTE-BELLOT. *Turbulence*. CNRS Éditions – Sciences et techniques de l'ingénieur, 2003.
- [4] J. BOUSSINESQ. *Théorie de l'écoulement tourbillonnant*, 1877. *Mem. Pres. Acad. Sci.* XXIII.
- [5] G. L. BROWN and A. ROSHKO. *On density effects and large structure in turbulent mixing layers*. *J. of Fluid Mechanics*, 64(4) :775–816, 1974.
- [6] S. CARPY and R. MANCEAU. *Turbulence modelling of statistically periodic flows : synthetic jet into quiescent air*. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 27 :756–767, 2006.
- [7] C. CHANGENET, Y. MARCHESSE, and P. GUARAT. *Numerical investigation for predicting drag torque and heat transfer in wet disengaged clutches*. In *International congress of fluid dynamics applications in ground transportation (Lyon)*, 2005.
- [8] B. J. DALY and F. H. HARLOW. *Transport Equations in Turbulence*. *Phys. Fluids*, 13 :2634–2649, 1970.
- [9] P. A. DURBIN. *On the $k - 3$ stagnation point anomaly*. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 17(1) :89–90, 1994.
- [10] J.H. FERZIGER and M. PERIĆ. *Computational Methods for Fluid Dynamics (3rd Version)*. Springer Ed., 2002.
- [11] C. J. FREITAS. *Perspective Selected Benchmarks from Commercial CFD Codes*. *A.S.M.E. J. FLuids Eng.*, 117 :210–218, 1995.
- [12] J. B. FREUND and et P. MOIN S. K. LELE. *Numerical Simulation of a Mach 1.92 Turbulent Jet and Its Sound Field*. *AIAA Journal*, 38 (11) :2023–2031, 2000.
- [13] M. M. GIBSON and B. E. LAUNDER. *Ground Effects on Pressure Fluctuations in the Atmospheric Boundary Layer*. *J. Fluid Mech*, 86 :491–511, 1978.
- [14] G. IACCARINO. *Predictions of a Turbulent Separated Flow Using Commercial CFD Codes*. *A.S.M.E. J. of Fluid Eng.*, 123 :819–827, 2001.
- [15] G. IACCARINO, A. OOI, P. A. DURBIN, and M. BEHNIA. *Reynolds averaged simulation of unsteady separated flow*. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 24 :147–156, 2003.
- [16] W. P. JONES and B. E. LAUNDER. *The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence*. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15 :301–314, 1974.

- [17] J. D. ANDERSON Jr. *Computational Fluids Dynamics - The basics with applications*. 1995. Edition MacGraw Hill.
- [18] J. KIM, P. MOIN, and R. MOSER. *Turbulent statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number*. *J. of fluid mechanics*, 177 :133–166, 1987.
- [19] A. N. KOLMOGOROV. *Curves in Hilbert space invariant with respect to a one-parameter group of motions*. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 26 (1) :6–9, 1940.
- [20] A. N. KOLMOGOROV. *Local structure of turbulence in an incompressible fluid at very high Reynolds number*. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 30 (299), 1940.
- [21] L. LANDAU and E. LIFCHITZ. *Mécanique des fluides*. 1971. Editions MIR.
- [22] B. E. LAUNDER. *Second-Moment Closure : Present... and Future?* *Inter. J. Heat Fluid Flow*, 10(4) :282–300, 1989.
- [23] B. E. LAUNDER, G. J. REECE, and W. RODI. *Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure*. *J. Fluid Mech.*, 68(3) :537–566, 1975.
- [24] B. E. LAUNDER and B. I. SHARMA. *Application of the energy dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc*. *Letters in Heat and Mass Transfer*, 1 :131–138, 1974.
- [25] B. E. LAUNDER and D. B. SPALDING. *The Numerical Computation of Turbulent Flows*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3 :269–289, 1974.
- [26] D. LAURENCE and B. I. SHARMA. *Turbulence modelling*. In *Second QNET-CFD Workshop, Luzern, Suisse*, 2002.
- [27] M. Lesieur. *La turbulence*. DEP Science, 1994.
- [28] J.R. MANSFIELD, O.M. KNIO, and C. MENEVEAU. *Dynamic LES of colliding vortex rings using a 3D vortex method*. *J Comp Phys*, 152 :305–345, 1999.
- [29] Y. MARCHESSE and C. CHANGENET. *Forced convective heat transfer over a noncircular slender cylinder*. *Proceedings of the institution of mechanical engineers, Part C. Journal of mechanical engineering science.*, 223(C2) :427–437, 2009.
- [30] Y. MARCHESSE, C. CHANGENET, and F. VILLE. *Numerical Investigation on Drag Coefficient of Balls in Rolling Element Bearing*. *Tribology Transactions*, 57(5) :778–785, 2014.
- [31] R. MARTINUZZI and C. TROPEA. *The flow around surface mounted, prismatic obstacles placed in a fully developed channel flow*. *Trans. ASME J. Fluid. Eng.*, 115 :85–93, 1996.
- [32] F.R. MENTER. *Influence of freestream values on $k - \omega$ turbulence model prediction*. *A.I.A.A. Journal*, 30(6), 1992.
- [33] F.R. MENTER. *Two-equation eddy viscosity models for engineering applications*. *A.I.A.A. Journal*, 32 :1598–1605, 1994.
- [34] R. D. MOSER, J. KIM, and N. MANSOUR. *Direct Numerical Simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$* . *Phys. Fluids*, 11 :943–946, 1999.
- [35] S. PALLAS, Y. MARCHESSE, C. CHANGENET, F. VILLE, and P. VELEX. *A windage power loss model based on CFD study about the volumetric flow rate expelled by spur gears*. *Mechanics and Industry*, 13(5) :317–323, 2012.

- [36] S. B. POPE. *A more general effective-viscosity hypothesis*. *J. Fluid Mech.*, 72 :331–340, 1975.
- [37] S. B. POPE. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000.
- [38] S. B. POPE. *Ten questions concerning the large-eddy simulation of turbulent flows*. *New Journal of Physics*, 6 (35), 2004.
- [39] Z. A. PRANDTL, 1925. *Zs Angew. Math. Mech.*
- [40] O. REYNOLDS. *An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct and sinous, and the law of resistance in parallel channel*. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, pages 51–105, 1883.
- [41] L. F. RICHARDSON. *Weather prediction by numerical process*, 1922. Cambridge University Press.
- [42] W. RODI. *Experience with two-layer models combining the $k - \epsilon$ with a one-equation model near the wall*. *A.I.A.A. Paper*, 91-0216, 1991.
- [43] H. SCHLICHTING. *Boundary-Layer Theory - 7ème édition*. 1960. Edition MacGraw Hill.
- [44] F.G. SCHMITT. *About Boussinesq's turbulent viscosity hypothesis : historical remarks and a direct evaluation of its validity*. *Comptes Rendus Mécanique*, 335 :617–627, 2007.
- [45] K. B. SHAH. *Large Eddy Simulation of the flow past a cubic obstacle*. *Thèse*, 1998.
- [46] T. H. SHIH, W.W. LIOU, A. SHABBIR, Z. Yang, and J. ZHU. *A new $k - \epsilon$ eddy-viscosity model for high Reynolds number turbulent flows. Model development and validation*. *Computers & Fluids*, 24(3) :227–238, 1995.
- [47] J. SMAGORINSKY. *General circulation experiments with the primitive equations*. *Monthly weather review*, 91(3) :99–164, 1963.
- [48] S. R. SPALART and S. A. ALLMARAS. *A one-equation turbulence model for aerodynamic flows*, 1992. Technical Report AIAA-92-0439, et aussi dans *La Recherche Aérospatiale*, 1(94), pp. 5-21.
- [49] L. KELVIN (W. Thomson). *On the propagation of laminar motion through a turbulently moving inviscid liquid*. *Phil. Mag.*, 24 :342–353, 1887.
- [50] H. K. VERSTEEG and W. MALALASEKERA. *An introduction to computational fluid dynamics - The finite volume method -2nd édition*. Pearson Education Limited, 2007.
- [51] T. WEI and W. W. WILLMARTH. *Reynolds number effects on the structure of a turbulent channel flow*. *J. Fluid Mech*, 204 :57–95, 1989.
- [52] D.C WILCOX. *Reassessment of the scale determining equation for advanced turbulence models*. *A.I.A.A. Journal*, 26 (136) :1299–1310, 1988.
- [53] D.C WILCOX. *Turbulence modeling for CFD (2nd édition)*. DCW Industries, Inc., 5354 Palm Drive, La Canada, California 91011, 1988.
- [54] V. YAKHOT and S.A. ORSZAG. *Renormalization group analysis of turbulence. 1. Basic theory*. *J. Scientif. Computing*, 1(1) :3–51, 1986.
- [55] V. YAKHOT, S.A. ORSZAG, S. THANGAM, T.B. GATSKI, and C.G. SPEZIALE. *Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique*. *Phys. Fluids*, A4(7) :1510–1520, 1992.

Lectures intéressantes

Ouvrages

- **Computational Fluid Dynamics : The Basics with Applications**
John D. Anderson Jr, *McGraw-hill International Edition*, 1995;
- **Computational Fluid Dynamics : Principles and Applications**
J. Blazek, *Ed. Elsevier*;
- **Computational Methods for Fluid Dynamics**
Joel H. Ferziger & Milovan Perić, Ed. Springer (3ème édition);
- **Les écoulements turbulents, modélisation et simulation**
Roland Schiestler, Édition Hermes;
- **Fundamentals of Aerodynamics**
John D. Anderson Jr, *McGraw-hill International Edition*, 2001;
- **Turbulence**
Christophe Bailly & Geneviève Comte-Bellot, *CNRS Édition*;
- **La turbulence**
Marcel Lesieur, *Collection Grenoble Sciences*, 1994;
- **La turbulence développée**
Marcel Lesieur, *La Recherche*, n° 139, pp 1412-1425, décembre 1982;
- **Turbulence en mécanique des fluides, Analyse du phénomène en vue de sa modélisation à l'usage de l'ingénieur**
Patrick Chassaing, *Cépaduès-Éditions*.

Cours

- **Modélisation aux moyennes de Reynolds ou Modélisation RANS**, Seconde partie du cours *Turbulence et modélisation de la turbulence*
Rémi Manceau, *Master Sciences et technologies - Poitiers*, 2004;

Sites internet

- <http://www.efluids.com/>
- <http://home.earthlink.net/~marutgers/>